

Ordinály – prehľad a porovnanie definícií

27. apríla 2023

Naivný prístup k ordinálnym číslam

- ▶ Pre každú dobre usporiadanú množinu existuje jediný ordinál taký, že $\alpha = \text{ot}(A, \leq)$
- ▶ Ak $\alpha = \text{ot}(A, \leq)$ a $\beta = \text{ot}(B, \leq')$, tak $\alpha \leq \beta$ znamená, že (A, \leq) je počiatočný úsek (B, \leq')

Naivný prístup k ordinálnym číslam

- ▶ Pre každý ordinál existuje nasledovník $S(\alpha) = \alpha + 1$.
- ▶ Pre každú množinu ordinálov existuje suprémum.
- ▶ Každá množina ordinálov je dobre usporiadaná.
- ▶ Pre každý ordinál platí $\alpha = \text{ot}(\{\beta \in \text{On}; \beta < \alpha\})$

Limitné ordinály

Ak $\alpha \neq 0$ je ordinál, tak platí jedna z možností:

- ▶ α je nasledovník: $\alpha = S(\beta) = \beta + 1$ pre nejaké $\beta \in \text{On}$;
- ▶ α je limitný ordinál $\alpha = \sup\{\beta \in \text{On}; \beta < \alpha\}$.

Axiomatický prístup k ordinálnym číslam

Pri tejto definícii platí

$$\alpha = \{\beta \in \text{On}; \beta < \alpha\},$$

t.j. každý ordinál sa rovná množine všetkých ordinálov od neho menších.

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

Axiomatický prístup k ordinálnym číslam

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$$

$$\sup\{\alpha_i; i \in I\} = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$$

Axiomatický prístup k ordinálnym číslam

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Kardinálne čísla

Kardinálne čísla = iniciálne ordinály, t.j. najmenší ordinál danej kardinality.