Transfinitná indukcia

27. apríla 2023

Transfinitná indukcia

Veta

Nech $\varphi(x)$ je formula teórie množín taká, že ak platí $\varphi(\beta)$ pre všetky ordinály menšie ako α, tak platí aj $\varphi(\alpha)$.
Potom je formula $\varphi(\alpha)$ pravdivá pre každý ordinál α.

Pre matematickú indukciu

Pomocou MI často nielen dokazujeme ale aj „konštruujeme“.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

Transfinitná rekurzia

Veta (O transfinitnej rekurzii)

Nech α je ordinálne číslo a φ je výroková funkcia s vlastnosťou, že pre každé $\beta < \alpha$ a pre každú funkciu f, ktorá má definičný obor $D(f) = \beta$, existuje práve jedno y také, že $\varphi(f, y)$.
Potom existuje práve jedna funkcia F taká, že $D(F) = \alpha$ a

$$F(\beta) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(F|_\beta, y).$$

Transfinitná rekurzia

Transfinitnú rekurziu by sme mohli použiť aj pre všetky ordinály.

- Buď by sme ju sformulovali pomocou triedových funkcií.
- Alebo by sme existenciu funkcie F nahradili existenciou a jednoznačnosťou zodpovedajúceho $\alpha' = F(\alpha)$.

Sčitovanie ordinálnych čísel

$$\alpha + \beta = \mathrm{ot}(A + B)$$

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$$

Transfinitnou rekurziou: $F(\alpha) = \gamma + \alpha$

(i) Ak $\alpha = 0$, tak $F(\alpha) = \gamma$.

(ii) Ak $\alpha = S(\alpha')$, tak $F(\alpha) = S(F(\alpha'))$.

(iii) Ak α je limitný ordinál, tak $F(\alpha) = \sup\{F(\alpha'); \alpha' < \alpha\}$.

Násobenie ordinálnych čísel

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{ot}(B \times A, \leq_{lex})$$

$$\omega + \omega = \omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega = \omega$$

$F(\beta) = \alpha \cdot \beta$

(i) $\alpha \cdot 0 = 0$

(ii) Ak $\beta = S(\beta')$, tak $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$

(iii) Ak β je limitný ordinál, tak $\alpha \cdot \beta = \sup_{\gamma < \beta} \alpha \cdot \gamma$.

Umocňovanie ordinálnych čísel

Nech $\alpha \neq 0$.

(i) $\alpha^0 = 1$

(ii) $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$

(iii) Ak β je limitný ordinál, tak $\alpha^\beta = \sup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$.

Umocňovanie ordinálnych čísel