Aplikácie transfinitnej indukcie

27. apríla 2023

Silno darbouxovské funkcie

Tvrdenie

Existuje podmnožina $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *taká, že všetky x-ové rezy* $A_x = \{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ *sú jednoprvkové a všetky y-ové rezy* $A^y = \{x \in \mathbb{R}; (x, y) \in A\}$ *sú husté v* $\mathbb{R}$.

Silno darbouxovské funkcie

Funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je:

- *darbouxovská,* ak na každom intervale (a, b) nadobúda všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$;
- *silno darbouxovská,* ak na každom intervale nadobúda všetky reálne hodnoty.

$$f \text{ je spojitá} \Rightarrow f \text{ je deriváciou} \Rightarrow f \text{ je darbouxovská}$$

Kardinálna aritmetika

Veta

Pre každý kardinál $a \geq \aleph_0$ platí $a \cdot a = a$.

Dôsledok

Ak a, b sú nekonečné kardinály, tak

$$a + b = ab = \max\{a, b\}.$$

Dôsledok

Pre ľubovoľnú nekonečnú množinu A platí

$$|A| = |A \times A|.$$

Kardinálna aritmetika

Dôsledok

Pre ľubovoľnú nekonečnú množinu A platí

$$|A| = |A \times A|.$$

Tarski: V ZF je AC ekvivalentná s tvrdením, že pre každé $|A| \geq \aleph_0$ platí $|A| = |A \times A|$.

Kardinálna aritmetika

$$(A \times A, \leq^*)$$

$$(a_1, b_1) <^* (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (m_1 < m_2) & \vee \\ (m_1 = m_2 \wedge a_1 < a_2) & \vee \\ (m_1 = m_2 \wedge a_1 = a_2 \wedge b_1 < b_2) \end{cases}$$

Zornova lema

- Nech $(P, \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina, ktorá nemá maximálny prvok.
- Pre každé p platí $p\uparrow = \{q \in P; q > p\} \neq \emptyset$.
- Transfinitnou indukciou dokážeme existenciu reťazca bez horného ohraničenia.

Steinitzova veta

Veta (Steinitzova veta)

Pre každé pole existuje algebraicky uzavreté nadpole, ktoré ho obsahuje.

Fakty o rozšíreniach

- Ireducibilný polynóm $p(x)$ má koreň $F[x]/(p(x))$.
- Pre každý ireducibilný polynóm existuje rozkladové pole.

Stačí menej polynómov

Tvrdenie

Nech K je algebraické rozšírenie poľa F a navyše každý nekonštantný polynóm z $F[x]$ sa dá rozložiť v $K[x]$ na súčin koreňových činiteľov. Potom aj každý nekonštantný polynóm z $K[x]$ má v $K[x]$ rozklad na súčin koreňových činiteľov.

Dôkaz transfinitnou indukciou

- $\{f_\beta(x); \beta < \gamma\}$ sú všetky ireducibilné polynómy z $F[x]$.
- $K_{\alpha+1}$ je také rozšírenie K_α, v ktorom $f_\alpha(x)$ má koreň.
- Pre limitné ordinály definujeme K_α ako induktívnu limitu.

Dôkaz pomocou ZL

- Snažíme sa dostať maximálne algebraické rozšírenie.
- Pre algebraické rozšírenia platí

$$|L| \leq \max\{\aleph_0, |F|\},$$

teda sa vieme vyhnúť tomu, že by sme museli pracovať s vlastnou triedou.
- Treba ukázať, že zjednotením reťazca algebraických rozšírení dostaneme algebraické rozšírenie.

Iné dôkazy

- Faktorový okruh $F[\{x_f; f \in F[x]\}]$ podľa maximálneho ideálu obsahujúceho všetky $f(x_f)$.
- Použitím vety o kompaktnosti (logika a teória modelov).