Kombinatorické princípy

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1}$$

Úloha 1. Ukážte, že rovnosť

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

sa dá dostať ako špeciálny prípad hokejkovej identity (1).

Úloha 2. [E, 5.E15] Ukážte, že počet usporiadaných trojíc (x, y, z) takých, že $x, y, z \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ a $z > \max\{x, y\}$ sa dá dvoma spôsobmi vyjadriť ako

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

Poznáte nejaké iné vyjadrenia pre súčet prvých n druhých mocnín? Zhoduje sa výsledok s tým, čo vyšlo tu?

Úloha 3. Vedeli by ste dostať nejaké vyjadrenie pre $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ využitím rovností $k^2 = 2\binom{k}{2} + k$ resp. $k^2 = 2\binom{k+1}{2} - k$?

Úloha 4. Vedeli by ste dostať nejaké vyjadrenie pre $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ využitím $k^2 = \binom{k}{2} + \binom{k-1}{2}$?

Úloha 5. Zdôvodnite, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (Pre všetky prípustné hodnoty k a n.)

Úloha 6. Koľko je štvorciferných čísel, kde všetky cifry sú párne?
Koľko z nich je deliteľných štyrmi?

Úloha 7. Koľko sa dá zostaviť 5-ciferných kódov používajúcich číslice $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ takých, kde práve n cifier je nepárnych.

Úloha 8. Koľkými spôsobmi môžeme položiť tri
a) rovnaké
b) rôzne
šachové figúrky na štandardnú šachovnicu 8×8, ak sa žiadne z nich nesmú nachádzať v tom istom riadku ani v tom istom stĺpci.

Úloha 9. Dvanásť študentov sa pripravuje na štátnice a chcú sa rozdeliť na tri skupiny: Dvaja vypracujú otázky z kombinatoriky, piati vypracujú otázky z matematickej analýzy, piati vypracujú otázky z lineárnej algebry. Koľkými spôsobmi sa môžu rozdeliť?

Úloha 10. Koľkými spôsobmi je možné vybrať 11-členný futbalový tím a 5-členný basketbalový tím z 30-tich študentov, ak

a) Nikto nebude v oboch tímoch.
b) Ľubovoľný počet študentov môže byť v oboch tímoch.
c) Najviac jeden študent bude v oboch tímoch.

Úloha 11. Senát pozostáva zo 100 senátorov z 50-tich štátov, každý štát je reprezentovaný dvomi senátormi. Koľkými spôsobmi je možné zvoliť štvorčlenný výbor keď požadujeme, aby vo výbore neboli dvaja senátori z toho istého štátu?

Úloha 12. Chceme vybrať 6 členov disciplinárnej komisie spomedzi štyroch študentov a ôsmich učiteľov. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť, ak v komisii musia byť aspoň traja študenti?

Úloha 13. Desať študentov sedí v jednom rade. Pretože Harry a Hermiona neustále vyrušovali, nesmú sedieť vedľa seba. Koľkými spôsobmi sa vedia študenti usadiť?

Aký počet možností dostanem, ak mám troch študentov, z ktorých žiadni dvaja nesmú sedieť vedľa seba?

Úloha 14. Máme štandardný balíček 52 kariet (t.j. $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\clubsuit, \blacklozenge, \spadesuit, \heartsuit\}$). Koľkými spôsobmi sa dá vybrať 10 kariet tak, aby sme všetky karty mali rôznej hodnoty. (T.j. nevyskytnú sa dve esá, dve dvojky, atď.)

Úloha 15. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

(Návod: Pozerajte sa na podmnožiny vhodnej množiny, ktoré obsahuje tri zvolené prvky.)

Úloha 16. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{2}m + \binom{m}{2}n = \binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}.$$

(Hint: Môžete sa pozerať na výber trojčlennej komisie spomedzi m mužov a n žien.)

Úloha 17. Overte výpočtom aj kombinatorickou úvahou rovnosť:

$$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}.$$

Literatúra

[E] Arthur Engel. *Problem Solving Strategies.* Springer, New York, 1998. Problem Books in Mathematics.