Počítanie možností

Úloha 1. Koľko je celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 31$ takých, že $x_i \geq i$ pre $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Úloha 2. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12$ takých, že $x_i \in \mathbb{N}_0$? (Hint: Môže pomôcť zamyslieť sa nad paritou čísel x_3 a x_4.)

Úloha 3. [G, Exercise 1.1.32a]: Zdôvodnite, že pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\frac{(3k)!}{6^k}$ celé číslo, t.j. $6^k \mid (3k)!$.

Úloha 4. Ukážte, že počet možností ako vybrať k-prvkovú podmnožinu z $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že nebude obsahovať susedné čísla, je práve $\binom{n-k+1}{k}$. (Hint 1: Chceme vlastne čísla $a_1, \ldots, a_k$ také, že $a_1 < a_2 - 1$, $a_2 < a_3 - 1$, atď. Hint 2: Dá sa úloha previesť nejako vhodne na počítanie riešení $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n$ s nejakými vhodnými obmedzeniami. Hint 3: Ak máte nápad na nejaké celkom iné riešenie, nedajte sa pomýliť možnosťami naznačenými v predošlých dvoch hintoch.)

Binomické koeficienty

Úloha 5. Nech A, B sú štvorcové matice rovnakej veľkosti a nad tým istým poľom.
a) Platí pre matice binomická veta v tvare

$$(I + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k,$$

pričom (ako obvykle) berieme $B^0 = I$?
b) Platí pre matice aj takáto podoba binomickej vety?

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

c) Vedeli by ste prísť aspoň na nejaké postačujúce podmienky, kedy pre matice funguje binomická veta?

Úloha 6. Vedeli by ste kombinatorickou úvahou zdôvodniť, že počet podmnožín n-prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je taký istý, ako počet podmnožín s nepárnym počtom prvkov? Viete napríklad dostať nejakú bijekciu medzi množinou všetkých párnych podmnožín a množinou všetkých nepárnych podmnožín?

Úloha 7. Čo sa stane, ak do binomickej vety dosadíme $t = \pm i$? Vedeli by ste na základe toho odvodiť identitu, ak sčitujeme v riadku Pascalovho trojuholníka každý štvrtý binomický koeficient?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k} = \frac{2^n + (1+i)^n + (1-i)^n}{4} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}}{2}$$

Úloha 8. Označme $\omega = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = e^{2\pi i/3}$, t.j. komplexné riešenie rovnice $x^3 = 1$. Ukážte, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k} = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3} = \frac{2^n + 2\cos \frac{n\pi}{3}}{3}$$

Úloha 9. Vedeli by ste fakt, že výrazy

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{n-k}$$

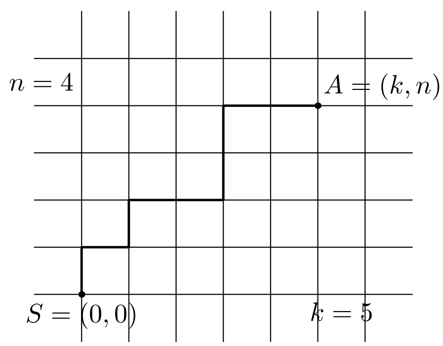
predstavujú tú istú sumu použiť na odvodenie rovnosti $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$?

Úloha 10. Rovnosť z predošlej úlohy sa dá ekvivalentne prepísať ako

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

a v takejto podobe ju môžeme intepretovať ako: Priemerná veľkosť podmnožiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je $\frac{n}{2}$. Dá sa aj takýto pohľad použiť na dôkaz tejto rovnosti? (Aj keď sa dá povedať, že to je skoro veľmi podobné na argument naznačený v predošlej úlohe.)

Úloha 11. Aký je počet ciest po mriežke z bodu $(0, 0)$ do (k, n) takých, že v každom kroku sa posunieme doprava alebo nahor (t.j. každý krok je tvaru $(i, j) \to (i + 1, j)$ alebo $(i, j) \to (i, j + 1)$)? Príklad povolenej cesty je na obrázku 1.



Obr. 1: Príklad cesty v mriežke

Literatúra

[G] R. Grimaldi. *Discrete and combinatorial mathematics.* Addison Wesley, Boston, 2004.