Binomické koeficienty

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}. \tag{1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \tag{2}$$

Úloha 1. Nech $n \in \mathbb{N}_0$. Zistite, pre ktoré $k \in \mathbb{Z}$ platí nerovnosť $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ a pre ktoré k platí obrátená nerovnosť.

Úloha 2. Ukážte. že pre $n, k \in \mathbb{Z}$ také, že $0 \leq k \leq n$ platí $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$. Dá sa táto rovnosť použiť na riešenie úlohy 1?

Úloha 3. Dokážte, že pre $n, k, l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}.$$

Úloha 4. Vedeli by ste nájsť nejakú kombinatorickú interpretáciu, ktorou sa dá odvodiť nasledujúca rovnosť? Alebo by ste ju vedeli s použitím niektorej identity z tejto časti previesť na inú známu sumu?

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Úloha 5. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ je párne}}} k\binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ je nepárne}}} k\binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

Úloha 6. Dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Úloha 7. Dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Úloha 8. Dá sa výraz $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ upraviť nejakým spôsobom, ktorý by nám pomohol pri vyjadrení sumy $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$?

Úloha 9. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$