

## Princíp zapojenia a vypojenia

Tieto úlohy sú sčasti zamerané na princíp zapojenia a vypojenia a sčasti na niektoré pojmy, ktoré sme stretli v kapitole o PIE (napríklad permutácie bez pevného bodu, Eulerova funkcia).

Ak  $D_n$  označuje počet permutácií bez pevného bodu, tak platí:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (1)$$

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left( 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad (2)$$

Eulerova funkcia:

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\}|$$

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)$$

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^k (p_j^{a_j} - p_j^{a_j-1}) = \prod_{j=1}^k p_j^{a_j-1} (p_j - 1)$$

Počet celočíselných riešení rovnice  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  vyhovujúcim podmienke  $x_i \geq 0$  je práve  $\binom{n+k-1}{k-1}$  a pri podmienke  $x_i \geq 1$  dostaneme presne  $\binom{n-1}{k-1}$  riešení.

**Úloha 1.** Ukážte, že

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad (3)$$

platí pre všetky  $n \in \mathbb{N}$ .

**Úloha 2.** Ukážte rovnosť (2) matematickou indukciou a použitím (3). (T.j. bez použitia princípu zapojenia a vypojenia.)

**Úloha 3.** Uvažujme permutácie množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ako sa dá vyjadriť počet permutácií, ktoré majú práve  $k$  pevných bodov?

**Úloha 4.** Ukážte, že pre  $n \in \mathbb{N}_0$  platí

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} D_k.$$

**Úloha 5.** Ukážte, že pre ľubovoľné  $n \in \mathbb{N}_0$  platí  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ . (Hint: Môže pomôcť skúsiť nejako rátať, koľko je takých  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , pre ktoré  $\gcd(k, n) = d$ .)

**Úloha 6.** Ukážte, že pre  $n > 2$  je  $\varphi(n)$  párne číslo.

**Úloha 7.** Koľko existuje riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

v nezáporných celých čísla takých, že  $x_1 \leq 3$ ,  $x_2 \leq 6$ ,  $x_3 \leq 12$ ?

**Úloha 8.** [R, Example 8.6.1] Aký je počet celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

takých, že platí  $0 \leq x_1 \leq 3$ ,  $0 \leq x_2 \leq 4$  a  $0 \leq x_3 \leq 6$ ?

**Úloha 9.** Kolko existuje štvoríc celých čísel takých, že platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

a súčasne  $0 \leq x_i \leq 10$ .

**Úloha 10.** [B, 2.21] Kolko existuje celočíselných riešení rovnice  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$  takých, že  $1 \leq x_1 \leq 3$ ,  $2 \leq x_2 \leq 4$ ,  $3 \leq x_3 \leq 5$ ,  $4 \leq x_4 \leq 6$ ?

**Úloha 11.** Kolko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

takých, že  $2 \leq x_1 \leq 4$ ,  $3 \leq x_2 \leq 6$ ,  $4 \leq x_3 \leq 6$ ,  $x_4 \geq 2$ .

**Úloha 12.** Kolko prirodzených čísel  $n \leq 1000$  je deliteľných dvojkou alebo sedmičkou?

**Úloha 13.** [V, Problem 136] Kolko je celých čísel v rozsahu 0 až 999, ktoré nie sú deliteľné päťkou ani sedmičkou

**Úloha 14.** [B, 2.44] Kolko existuje prirodzených čísel bez štvorcov, ktoré nepresahujú 100? (Prirodzené číslo  $n$  je číslo bez štvorcov, ak pre  $k \in \mathbb{N}$  z  $k^2 \mid n$  vyplýva  $k = 1$ . Inak povedané, nie je deliteľné žiadnou netriviálnou druhou mocninou.)

Hint: Pomôže zamyslieť sa nad tým, ako môže vyzeráť prvočíselný rozklad čísla bez štvorcov.

**Úloha 15.** Kolko existuje celočíselných riešení rovnice  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$  takých, že  $2 \leq x_i \leq 7$  pre  $i = 1, 2, 3, 4$ ?

**Úloha 16.** Kolko existuje celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 18$$

v nezáporných celých číslach takých, že  $0 \leq x_1 \leq 6$ ,  $4 \leq x_2 \leq 9$ ,  $7 \leq x_3 \leq 14$ .

**Úloha 17.** [K, Cvičenie 4.9] Dvaja učitelia skúšajú súčasne skupinu 4 študentov, každý jeden predmet. Každý študent odpovedá z jedného predmetu 30 minút. Kolko existuje rozvrhov skúšania, ak požadujeme, aby skúšky skončili za dve hodiny?

**Úloha 18.** Uvažujme riešenia rovnice  $x_1 + x_2 + x_3 = 48$  v nezáporných celých číslach

a) Kolko existuje riešení takých, kde všetky tri čísla  $x_1, x_2, x_3$  sú rôzne?

b) Kolko existuje riešení takých, že  $x_1 < x_2 < x_3$ ?

**Úloha 19.** Kolko existuje čísel menších než tisíc, pre ktoré je ciferný súčet rovný 14.

**Úloha 20.** Kolkými spôsobmi sa dajú permutovať písmená slova KOMBINATORIKA tak, aby sa neopakovali dve písmená po sebe.

**Úloha 21.** [K, Cvičenie 4.9], [HKŠ, Example 1.6.3(iii)] Kolko šesťpísmenkových slov možno zostaviť z písmen slova TIKTAK, ak dve rovnaké písmená nesmú nasledovať bezprostredne za sebou.

**Úloha 22.** [K, Cvičenie 4.10], [HKŠ, Exercise 6.6(iii)], [M, Example 4.4(a)], [V, Problem 214] Kolkými spôsobmi možno do radu usadiť troch Angličanov, troch Francúzov, troch Talianov tak, aby žiadni traja krajanovia nesedeli vedľa seba.

**Úloha 23.** [HKŠ, Exercise 6.3(iv)] Kolkými spôsobmi sa dá uložiť  $n$  veží na šachovnicu  $n \times n$  tak, aby každé políčko bolo obsadené alebo ohrozené niektorou z nich? (Odpoveď:  $2n^n - n!$ .)

## Literatúra

- [B] V. K. Balakrishnan. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics including concepts of Graph Theory*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [HKŠ] Jiří Herman, Radan Kučera, and Jaromír Šimša. *Counting and Configurations: Problems in Combinatorics, Arithmetic, and Geometry*. Springer, New York, 2003. CMS Books in Mathematics.
- [K] Martin Knor. *Kombinatorika a Teória Grafov I*. Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.
- [M] Pavle Mladenović. *Combinatorics: A Problem-Based Approach*. Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019.
- [R] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 7th edition, 2012.
- [V] N. Ya. Vilenkin. *Combinatorics*. Academic Press, New York, 1971.