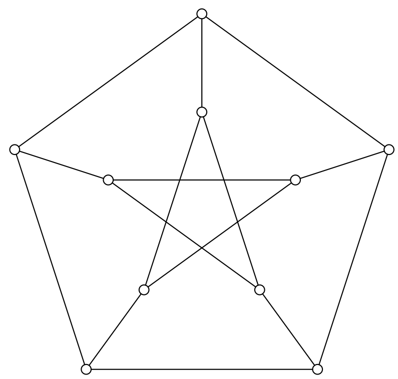
1 Základné pojmy, súvislosť, stromy

Úloha 1.1. Dokážte: Pre ľubovoľné 2 vrcholy u, v Petersenovho grafu existuje automorfizmus f Petersenovho grafu taký, že $f(u) = v$. (Názov *automorfimus* znamená izomorfizmus grafu G s tým istým grafom G.)



Obr. 1: Petersenov graf

Úloha 1.2. Definujme graf G nasledovne. Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Množinu vrcholov V budú tvoriť všetky dvojprvkové podmnožiny množiny M. Dva vrcholy $A, B \subseteq M$ budú spojené hranou ak $A \cap B = \emptyset$. Dokážte, že je to vlastne Petersenov graf (teda že je izomorfný s Petersenovým grafom). Vedeli by ste použiť tento popis na dôkaz toho, že
a) pre ľubovoľné 2 vrcholy u a v existuje automorfimzus Petersenovho grafu taký, že $f(u) = v$,
b) pre ľubovoľné 2 dvojice susedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfimzus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$,
c) pre ľubovoľné 2 dvojice nesusedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfimzus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$.

Úloha 1.3. Dokážte: V každom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú dva (rôzne) vrcholy, ktoré majú rovnaký stupeň.

Úloha 1.4. Nech $G = (V, E)$ je graf. Pre ľubovoľné dva vrcholy u, v grafu G definujme reláciu $\sim$ na množine V tak, že $u \sim v$ práve vtedy, keď existuje cesta z u do v. Ukážte, že táto relácia je relácia ekvivalencie na množine V. Triedy ekvivalencie $\sim$ nazývame *komponenty súvislosti* grafu G.

Úloha 1.5. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf a C je niektorý jeho komponent súvislosti. Ukážte, že indukovaný podgraf na množine C je súvislý.

Úloha 1.6. Ukážte, že pre každý vrchol u grafu G je jeho komponent súvislosti rovný najväčšiemu indukovanému podgrafu obsahujúcemu vrchol u.

Úloha 1.7. Dokážte: Súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $n - 1$ hrán.

Úloha 1.8. Ukážte, že každý strom je minimálny súvislý graf, t.j. vynechaním ľubovoľného vrcholu vznikne nesúvislý graf. (Hint: Dá sa použiť tvrdenie o tom že pridanie či vynechanie vrchola stupňa 1 neovplyvní to, že daný graf je strom.)

Úloha 1.9. Ukážte, že ak T je strom, tak pre ľubovoľné dva vrcholy $x, y \in V(T)$ existuje práve jedna cesta z x do y. (Hint: Dá sa použiť tvrdenie o tom že pridanie či vynechanie vrchola stupňa 1 neovplvyní to, že daný graf je strom.)

Úloha 1.10. Dokážte: Graf $G = (V, E)$ je súvislý práve vtedy, keď pre každý rozklad množiny vrcholov $V = V_1 \cup V_2$ na dve neprázdne disjunktné množiny existuje hrana spájajúca nejaký vrchol z V_1 s nejakým vrcholom z V_2.

Úloha 1.11. Dokážte, že ak graf na n vrcholoch má aspoň $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak je súvislý. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.

Úloha 1.12. Nech P_1 a P_2 sú dve cesty maximálnej možnej dĺžky v súvislom grafe G. Dokážte, že P_1 a P_2 majú spoločný vrchol. Musia mať spoločnú hranu?

2 Rovinné grafy

Eulerova formula

$$v - h + s = 2 \tag{1}$$

Nerovnosti pre ľubovoľný planárny graf resp. pre ľubovoľný planárny graf bez kružníc dĺžky 3 (za predpokladu $v \geq 3$):

$$h \leq 3v - 6$$
$$h \leq 2v - 4$$

Grafy K_5 ani $K_{3,3}$ nie sú planárne.
Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupňa ≤ 5.

Úloha 2.1. Ukážte, že každý planárny graf obsahuje vrchol stupňa nanajvýš 5.

Úloha 2.2. Ukážte, že ak G je planárny graf, tak aj každý jeho podgraf je planárny.

Úloha 2.3. Ukážte, že pre $n \leq 4$ sú všetky grafy na n vrcholoch planárne.

Úloha 2.4. Ukážte, že graf G (nie nutne súvislý) platí rovnosť $v - h + s = 1 + c$, kde c označuje počet komponentov súvislosti.

Úloha 2.5. Ukážte, že ak pre rovinný graf platí rovnosť $h = 3v - 6$, tak pri ľubovoľnom rovinnom nakreslení je každá stena ohraničená kružnicou dĺžky 3. (T.j. každá stena je trojuholník)

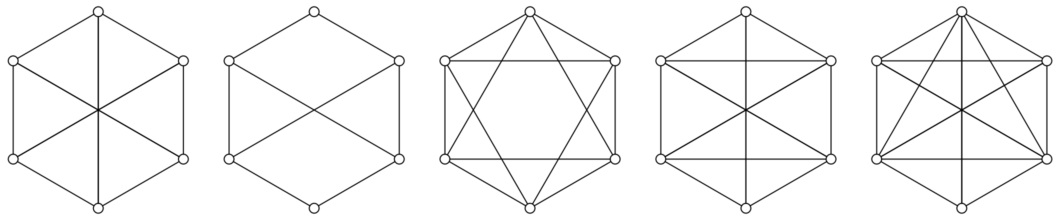
Úloha 2.6. Ukážte, že pre ľubovoľné $v \geq 3$ existuje rovinný graf, ktorý má práve $3v - 6$ hrán.

Úloha 2.7. Ukážte, že pre ľubovoľné (nie nutne súvislý) graf G platí nerovnosť $h \leq 3v - 6$. Dá sa odvodiť o čosi silnejšia nerovnosť, v ktorej bude vystupovať aj počet komponentov súvislosti grafu G?

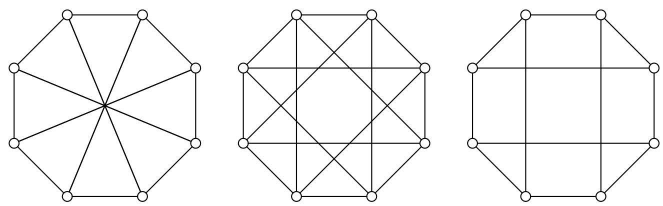
Úloha 2.8. Pre ktoré m, n je graf $K_{m,n}$ planárny?

Úloha 2.9. Nech G je graf na n vrcholoch a $n \geq 11$. Dokážte, že potom graf G alebo jeho komplement nie je planárny.

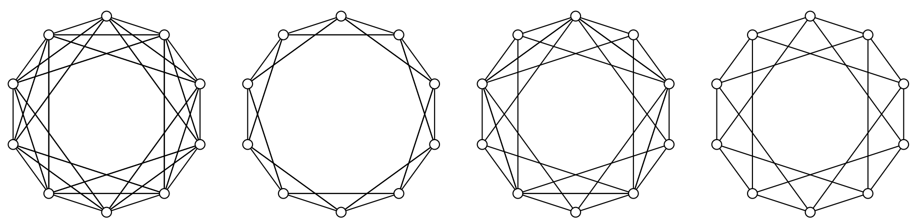
Úloha 2.10. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



Úloha 2.11. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



Úloha 2.12. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné?



Úloha 2.13. Ukážte, že: a) Po vynechaní ľubovoľnej hrany z K_5 dostaneme planárny graf. b) Po vynechaní ľubovoľnej hrany z $K_{3,3}$ dostaneme planárny graf.