

Kombinatorické princípy

17. februára 2025

Sčítací princíp

Pre ľubovoľné množiny A, B také, že $A \cap B = \emptyset$ platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Všeobecnejšie, ak máme množiny A_1, \dots, A_n , ktoré sú po dvoch disjunktné, tak

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Násobiaci princíp

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|.$$

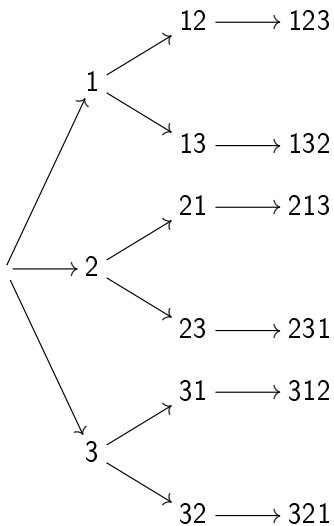
Násobiaci princíp

Tvrdenie (Násobiaci princíp)

Ak množina A pozostáva z usporiadaných k -tic, pričom na prvej pozícii sa môže vyskytnúť práve n_1 množností a pre každú voľbu a_1, \dots, a_{j-1} máme práve $n_j - 1$ možností, ktoré sa môžu vyskytnúť na j -tej pozícii, tak počet prvkov množiny A je

$$|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{j=1}^k n_j.$$

Počet permutácií



Počet permutácií

Tvrdenie

Počet permutácií množiny n je

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1.$$

$$0! = 1$$

Počet variácií

Definícia

Pre $k, n \in \mathbb{N}$ usporiadaný výber k prvkov z n -prvkovej množiny nazývame *variácia k -tej triedy z n prvkov*.

Tvrdenie

Počet variácií k -tej triedy z n prvkov je

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1).$$

Rastúca a klesajúca mocnina

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (x-i)$$

$$x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1) = \prod_{i=0}^{k-1} (x+i)$$

$$x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$$

Počet podmnožín

Pre $n \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{Z}$ zaved'me označenie $\binom{n}{k}$ pre počet k -prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.

Všimnime si, že pre $k < 0$ aj pre $k > n$ automaticky máme $\binom{n}{k} = 0$.

Poznámka

To, že symbol $\binom{n}{k}$ zavádzame aj pre $k < 0$ má zmysel hlavne preto, že nám to zjednoduší zápis niektorých tvrdení a dôkazov – nebudeme musieť zvlášť ošetriť niektoré krajné prípady. (Ale treba si dávať aspoň trochu pozor – nie úplne všetko čo uvedieme bude platiť aj pre záporné k . Určite minimálne pri prvých použitíach tejto konvencie na ňu upozorníme.)

Počet podmnožín

Tvrdenie

Počet k -prvkových podmnožín n -prvkovej množiny pre $k, n \in \mathbb{N}_0$ je:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (1)$$

Pascalova identita

Veta

Pre ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (2)$$

Pascalova identita

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

- ▶ Pre $k = 0$ táto rovnosť vlastne hovorí $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$.
- ▶ Pre $k = n + 1$ sa táto rovnosť zmení na $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$.
- ▶ Pre $k < 0$ aj $k > n + 1$ sú obe strany nulové.

Pascalova identita

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Podmnožiny $A \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ môžeme rozdeliť na dve časti:

- ▶ Tie, ktoré obsahujú nulu. Okrem nuly takéto množiny ešte musia obsahovať $k - 1$ prvkov z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$; je ich teda práve $\binom{n}{k-1}$.
- ▶ Ak $0 \notin A$, tak A je podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Takýchto podmnožín je práve $\binom{n}{k}$.

Pascalova identita

$$P_k = \{A \in P_k; 0 \in A\} \cup \{A \in P_k; 0 \notin A\}$$

$$|P_k| = |\{A \in P_k; 0 \in A\}| \cup |\{A \in P_k; 0 \notin A\}|$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Pascalova identita

Dôkaz algebraickými úpravami.

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
 &= \frac{1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n+1}{(n-k+1)k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}
 \end{aligned}$$

Pascalov trojuholník

$$\begin{array}{cccccc}
 \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \binom{5}{0} \\
 \binom{0}{1} & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \\
 \binom{1}{2} & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & & \\
 \binom{2}{3} & \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & & & \\
 \binom{3}{4} & \binom{4}{4} & & & & \\
 \binom{4}{5} & & & & & \\
 \binom{5}{5} & & & & &
 \end{array}$$

Pascalov trojuholník

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

Počet zobrazení

$$|\{f: A \rightarrow B\}| = |B|^{|A|}$$

$$0^0 = 1$$

Princíp bijekcie

Veta

Počet všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je 2^n .

Počet všetkých podmnožín ľubovoľnej n -prvkovej množiny je 2^n .

- ▶ Môžeme to dokázať matematickou indukciou.
- ▶ Alebo aj použitím princípu bijekcie.

Princíp bijekcie

Veta

Počet všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je 2^n .

Počet všetkých podmnožín ľubovoľnej n -prvkovej množiny je 2^n .

$$\mathcal{P}(M) \rightarrow \{0, 1\}^M$$

$$A \mapsto \chi_A$$

Počítanie dvoma spôsobmi

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Súčet riadku Pascalovho trojuholníka

Veta

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (3)$$

Dôkaz matematickou indukciou

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 1 & & & & 1 + 3 & & 3 + 3 & & 3 + 1 & & 1
 \end{array}$$

Počítaním dvoma spôsobmi

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Obe strany tejto rovnosti vyjadrujú počet všetkých podmnožín n -prvkovej množiny.

Súčet po diagonále

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = ?$$

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} = ?$$

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = ?$$

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = ?$$

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = ?$$

Hokejková identita

Tvrdenie (Hokejková identita)

Pre ľubovoľné $k, n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad (4)$$

Počítanie dvoma spôsobmi

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Koľko je podmnožín $A \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$ takých, že $\max A = j$?

Hokejková identita – ešte trochu inak

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{j=k}^{s-1} \binom{j}{k} = \binom{s}{k+1}$$

Odčítaním dostaneme:

$$\sum_{j=s}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{s}{k+1}$$

$$\binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Hokejková identita – ešte trochu inak

$$\sum_{j=s}^{s+l-1} \binom{j}{k} = \binom{s+l}{k+1} - \binom{s}{k+1} \quad (5)$$

$$\binom{s}{k+1} + \sum_{j=s}^{s+l-1} \binom{j}{k} = \binom{s+l}{k+1}$$

$$5 + 10 + 20 = 35$$

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} = \binom{7}{4}$$