Výber s opakovaním

29. februára 2024

Permutácie s opakovaním

Definícia

Ak máme k dispozícii prvky k rôznych typov, pričom počty prvkov jednotlivých typov sú $n_1, \ldots, n_k$ a celkový počet je $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. O *permutáciach s opakovaním* hovoríme, ak sa pozeráme na všetky možné takéto usporiadania.

Multinomický koeficient:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Permutácie s opakovaním

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- Máme $n!$ usporiadaní pre n prvkov.
- Z nich skupiny veľkosti $n_1!n_2!\cdots n_k!$ predstavujú to isté usporiadanie.

Permutácie s opakovaním

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\ldots-k_{n-2}-k_{n-1}}{k_n}$$

Kombinácie s opakovaním

Chceme kúpiť n kníh; vyberáme spomedzi A, B, C. (Môžeme kúpiť aj viacero kusov tej istej knihy.)
Skúsme $n = 3$; dosť malá hodnota na to, aby sme vedeli vypísať všetky možnosti.

Kombinácie s opakovaním

$$AAA$$
$$AAB$$
$$AAC$$
$$ABB$$
$$ABC$$
$$ACC$$
$$BBB$$
$$BBC$$
$$BCC$$
$$CCC$$

Kombinácie s opakovaním

$$AAA||$$
$$AA|B|$$
$$AA||C$$
$$A|BB|$$
$$A|B|C$$
$$A||CC$$
$$|BBB|$$
$$|BB|C$$
$$|BC|C$$
$$||CCC$$

Kombinácie s opakovaním

Tvrdenie

Počet kombinácii s opakovaním k-tej triedy z n prvkov je rovný

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}$$

Kombinácie s opakovaním

- Dôkaz cez stars and bars;
- dôkaz matematickou indukciou.

$$K'(n,k) = K'(n-1,k) + K'(n,k-1)$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2}$$

Počet riešení

Tvrdenie

Pre dané $k, n \in \mathbb{N}_0$ je počet riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

takých, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 0$, je rovný

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Počet nezáporných riešení

Príklad

Koľko je celočíselných riešení $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ takých, že $x_{1,2,3} \geq 0$?

$$\binom{7}{2} = 21$$

Počet nezáporných riešení

$0+0+5$	$1+1+3$	$2+3+0$
$0+1+4$	$1+2+2$	$3+0+2$
$0+2+3$	$1+3+1$	$3+1+1$
$0+3+2$	$1+4+0$	$3+0+2$
$0+4+4$	$2+0+3$	$4+0+1$
$0+5+0$	$2+1+2$	$4+1+0$
$1+0+4$	$2+2+1$	$5+0+0$

Počet kladných riešení

Príklad

Koľko je celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

takých, že $x_{1,2} \geq 1$ a $x_{3,4} \geq 2$?
Substitúcia: $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 - 2$;
teraz máme $y_i \geq 0$.

$$\begin{aligned} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) &= 6 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 6 \end{aligned}$$

Podľa predošlého tvrdenia je takýchto štvoríc presne $\binom{9}{3}$.

Počet kladných riešení

Dôsledok

Pre dané $k, n \in \mathbb{N}_0$ je počet riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

taký, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 1$ rovný presne

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Hokejková identita

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} = n - j$$

- Pre $x_k = 0$ máme máme $\binom{n+k-2}{k-2}$ riešení.
- Pre $x_k = 1$ máme máme $\binom{n+k-3}{k-2}$ riešení.
- $\vdots$
- Pre $x_k = n$ máme máme $\binom{k-2}{k-2}$ riešení.

Hokejková identita

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} = n - j$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+k-2-j}{k-2}$$

Hokejková identita

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+k-2-j}{k-2}$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{i=k-2}^{n+k-2} \binom{i}{k-2}$$

Po substitúcii $l = k-2$ a $m = n+k-2$:

$$\binom{m+l+1}{l+1} = \sum_{i=l}^{m} \binom{i}{l}.$$