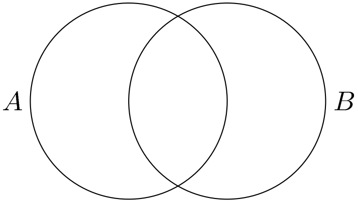
Princíp zapojenia a vypojenia

21. marca 2024

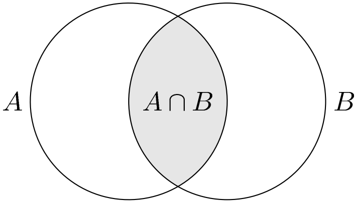
Počet prvkov $|A \cup B|$

$$|A \cup B| \stackrel{?}{=} |A| + |B|$$



Počet prvkov $|A \cup B|$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Počet prvkov $|A \cup B|$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|X \setminus (A \cup B)| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Počet prvkov $|A \cup B \cup C|$

$$|A \cup B \cup C| = ?$$

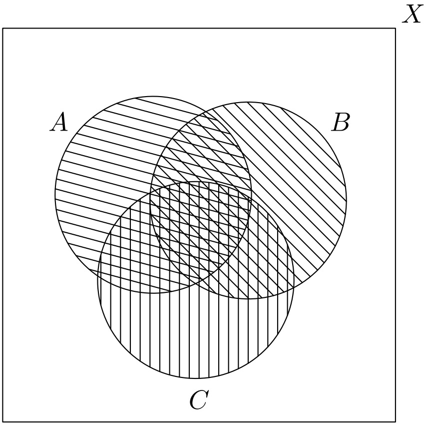
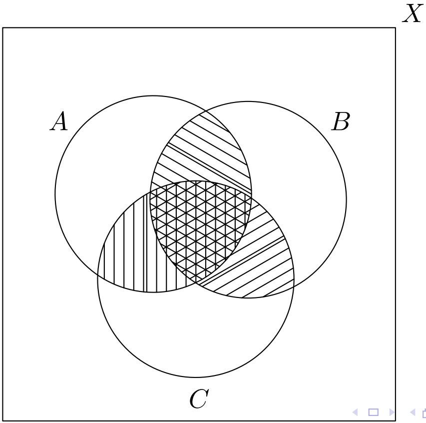


Figure: Prvky, ktoré sme započítali viackrát

Počet prvkov $|A \cup B \cup C|$

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$



Počet prvkov $|A \cup B \cup C|$

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| = {} & |A| + |B| + |C| \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|X \setminus (A \cup B \cup C)| = {} & |X| - |A| - |B| - |C| \\ & + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Veta (Princíp zapojenia a vypojenia)

Nech $A_1, \ldots, A_n$ sú konečné množiny a všetky z nich sú podmnožinami konečnej množiny X. Potom pre počet prvkov ich zjednotenia platí:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \ldots$$

$$\cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \ldots$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Princíp zapojenia a vypojenia

Ekvivalentne:

$$\left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \right| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots$$
$$\dots + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots$$
$$+ \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Princíp zapojenia a vypojenia

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\|I|=k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Dôkaz

Nech x patrí práve do s množín z $A_1, \ldots, A_n$.

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \binom{s}{k} \\
&= -\sum_{k=1}^{s} (-1)^{k} \binom{s}{k} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{s} (-1)^{k} \binom{s}{k} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dôkaz pomocou charakteristických funkcií

$\chi_A \colon M \to \{0, 1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \notin A. \end{cases}$$

Dôkaz pomocou charakteristických funkcií

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$M_I = \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$\chi_M(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \binom{s}{k} = 1$$

Dôkaz pomocou charakteristických funkcií

$$\chi_M(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x)$$

$$\sum_{x \in M} \chi_M(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \sum_{x \in M} \chi_{M_I}(x)$$

$$|M| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} |M_i|$$

Permutácie bez pevného bodu

$D_n =$ počet permutácií $\varphi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takých, že

$$\varphi(i) \neq i$$

pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

$D_4 = 9$

$$
\begin{matrix}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{matrix}
$$

Permutácie bez pevného bodu

n	D_n
0	1
1	0
2	1
3	2
4	9
5	44
6	265
7	1 854
8	14 833
9	133 496

Rekurencie pre D_n

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \tag{1}$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \tag{2}$$

Permutácie bez pevného bodu

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$
$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496

Vyjadrenie pomocou PIE

Veta

Pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \tag{3}$$

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \tag{4}$$

D_n a e

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \tag{5}$$

D_n a e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \tag{6}$$

Pravdepodobnosť, že náhodne vybratá permutácia nemá pevné body, je približne $\frac{1}{e}$.

D_n a faktoriály

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k$$

Počet surjekcií

$\mathrm{Sur}(n,k)$ = počet surjektívnych zobrazení z n-prvkovej množiny do k-prvkovej množiny

$$\mathrm{Sur}(n,k) = ?$$

Počet surjekcií

Tvrdenie

Nech $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k < n$ a X, Y sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = k$. Potom počet surjekcií z A do B je rovný

$$\mathrm{Sur}(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n. \tag{7}$$

$$\mathrm{Sur}(n,k) = k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(n-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-2}\binom{k}{k-2}2^n + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n$$

Eulerova funkcia

Definícia

Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N}; 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = 1\}|,$$

t.j. $\varphi(n)$ označuje počet celých čísel $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n.

Túto funkciu $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazývame *Eulerova funkcia*.

Eulerova funkcia

n	$\varphi(n)$	$\{k; \mathrm{gcd}(k,n) = 1\}$
1	1	$\{1\}$
2	1	$\{1\}$
3	2	$\{1,2\}$
4	2	$\{1,3\}$
5	4	$\{1,2,3,4\}$
6	2	$\{1,5\}$
7	6	$\{1,2,3,4,5,6\}$
8	4	$\{1,3,5,7\}$
9	6	$\{1,2,4,5,7,8\}$
10	4	$\{1,3,7,9\}$

Eulerova funkcia

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p-1) = p^a\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Eulerova funkcia

Veta

Nech $n \in \mathbb{N}_0$. Potom platí

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \tag{8}$$

kde súčin na pravej strane prebieha cez všetky prvočíselné delitele čísla n.

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k} (p_j^{a_j} - p_j^{a_j - 1}) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_j - 1}(p_j - 1).$$

Eulerova funkcia

$$A_i = \{s \in X; p_i \mid s\}.$$

$$\varphi(n) = |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)|.$$

$$\begin{aligned} |A_i| &= \frac{n}{p_i} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2}| &= \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| &= \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}} \end{aligned}$$

Eulerova funkcia je multiplikatívna

Dôsledok

Ak $m, n \in \mathbb{N}$ *sú nesúdeliteľné, t.j.* $\gcd(m, n) = 1$, *tak platí*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Dôsledok

Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ *označme* $d = \gcd(m, n)$. *Potom platí*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}.$$

Eulerova funkcia

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d), \tag{9}$$

pričom sumu na pravej strane chápeme tak, že sčitujeme cez všetky *prirodzené* čísla d, ktoré sú deliteľmi čísla n. (Úloha **??**.)

Eulerova veta

Veta (Eulerova veta)

Nech $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *sú také, že* $\gcd(a, n) = 1$. *Potom platí*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Veta (Malá Fermatova veta)

Nech $a \in \mathbb{Z}$ *a* p *je prvočíslo. Potom platí*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Malá Fermatova veta

Veta (Malá Fermatova veta)

Nech $a \in \mathbb{Z}$ a p je prvočíslo. Potom platí

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ekvivalentne: Pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

V celých číslach pre rovnicu

$$x_1 + \cdots + x_k = n$$

- $\binom{n+k-1}{k-1}$ je počet riešení takých, že $x_i \geq 0$;
- $\binom{n-1}{k-1}$ je počet riešení takých, že $x_i \geq 0$.

Vieme niečo povedať o počet riešení, ak budeme mať aj horné ohraničenia?

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

Príklad

Koľko existuje riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

v nezáporných celých čísla takých, že $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 12$?

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15,$$
$$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 6, 0 \le x_3 \le 12\}$$

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15, 0 \le x_1, 0 \le x_2, 0 \le x_3\}$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15,$$
$$0 \le x_1 \le 3, 0 \le x_2 \le 6, 0 \le x_3 \le 12\}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_1 \ge 4\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_2 \ge 7\} \\ A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_3 \ge 13\} \end{aligned}$$

$$|S| = |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|.$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$|X| = \binom{17}{2}$$

$$|A_1| = \binom{13}{2}$$

$$|A_2| = \binom{10}{2}$$

$$|A_3| = \binom{4}{2}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{6}{2}$$

$$|A_1 \cap A_3| = 0$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$
\begin{aligned}
|S| &= \binom{17}{2} - \binom{13}{2} - \binom{10}{2} - \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \\
&= 136 - 78 - 45 - 6 + 15 \\
&= 22
\end{aligned}
$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$0+3+12$	$0+4+11$	$0+5+10$	$0+6+9$
$1+2+12$	$1+3+11$	$1+4+10$	$1+5+9$
$1+6+8$	$2+1+12$	$2+2+11$	$2+3+10$
$2+4+9$	$2+5+8$	$2+6+7$	$3+0+12$
$3+1+11$	$3+2+10$	$3+3+9$	$3+4+8$
$3+5+7$	$3+6+6$		

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

Príklad

Aký je počet celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

takých, že platí $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$ a $0 \leq x_3 \leq 6$?

$$11 = 1 + 4 + 6$$
$$11 = 2 + 3 + 6$$
$$11 = 2 + 4 + 5$$
$$11 = 3 + 2 + 6$$
$$11 = 3 + 3 + 5$$
$$11 = 3 + 4 + 3$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$
\begin{aligned}
X &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_i \geq 0\} \\
A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_1 \geq 4\} \\
A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_2 \geq 5\} \\
A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_3 \geq 7\}
\end{aligned}
$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$|X| = \binom{13}{2}$$

$$|A_1| = \binom{9}{2}$$

$$|A_2| = \binom{8}{2}$$

$$|A_3| = \binom{6}{2}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4}{2}$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{2}{2}$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = \binom{13}{2} - \binom{9}{2} - \binom{8}{2} - \binom{6}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2}$$
$$= 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 = 6$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$0 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 4$ a $0 \leq x_3 \leq 6$

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 - x_1 \\ y_2 &= 4 - x_2 \\ y_3 &= 6 - x_3 \end{aligned}$$

$0 \leq y_1 \leq 3,\ 0 \leq y_2 \leq 4$ a $0 \leq y_3 \leq 6$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 11 \\ (3 - x_1) + (4 - x_2) + (6 - x_3) &= 13 - 11 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

Rovnica $x_1 + \cdots + x_k = n$ s obmedzeniami

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

$0 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 4$ a $0 \leq x_3 \leq 6$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2$$

$$\binom{4}{2} = 6$$