Hamiltonovské grafy

2. mája 2024

Hamiltonovské kružnice

Definícia

Hamiltonovská kružnica je kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu. *Hamiltonovská cesta* je cesta, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu.
Graf, ktorý má hamiltonovskú kružnicu, voláme *hamiltonovský.*

Nerovnosť $c(G - S) \leq |S|$

Tvrdenie

Ak graf $G = (V, E)$ má hamiltonovskú kružnicu, tak pre každú neprázdnu podmnožinu $S \subseteq V$ platí

$$c(G - S) \leq |S|,$$

t.j. graf, ktorý vznikne z G vynechaním k vrcholov má nanajvýš k komponentov súvislosti.

Párne grafy

Tvrdenie

Nech $G = (V, E)$ je párny graf a $V = V_1 \cup V_2$ je nejaký rozklad vrcholov zodpovedajúci ofarbeniu dvoma farbami. Ak G má hamiltonovskú kružnicu, tak $|V_1| = |V_2|$.

Oreho a Diracova veta

Veta (Ore)

Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak súčet stupňov ľubovoľných dvoch vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, je aspoň n, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

Z Oreho vety ľahko dostaneme ako dôsledok Diracovu vetu:

Dôsledok (Dirac)

Ak v grafe na n vrcholoch má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

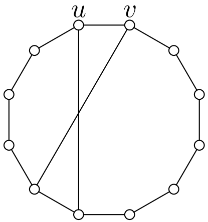
Bondy–Chvátalova veta

Veta (Bondy–Chvátal)

Nech G je graf s n vrcholmi. Nech u, v sú nejaké nesusedné vrcholy grafu G také, že

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Označme G' graf, ktorý vznikne z grafu G pridaním hrany medzi vrcholmi u a v.
Potom graf G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď G' má hamiltonovskú kružnicu.



Bondy–Chvátalova veta

Veta (Bondy–Chvátal)

Nech G je graf s n vrcholmi. Nech u, v sú nejaké nesusedné vrcholy grafu G také, že

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Označme G' graf, ktorý vznikne z grafu G pridaním hrany medzi vrcholmi u a v.
Potom graf G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď G' má hamiltonovskú kružnicu.

$c(G) =$ pridávame hrany pre nesusedné vrcholy také, že $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Dôsledok

Graf G obsahuje hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď jeho uzáver $c(G)$ obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

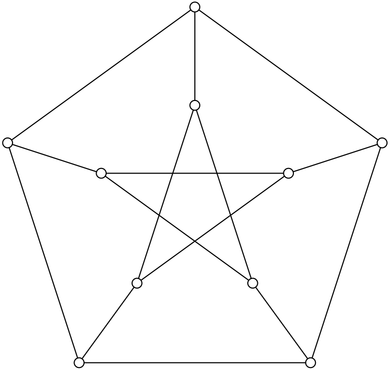
Bondy–Chvátalova veta

$c(G) =$ pridávame hrany pre nesusedné vrcholy také, že $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Dôsledok

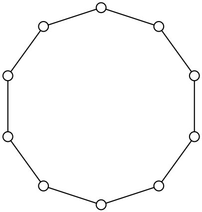
Graf G obsahuje hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď jeho uzáver c(G) obsahuje hamiltonovskú kružnicu.

Petersenov graf nie je hamiltonovský



Petersenov graf nemá kružnice dĺžok 3, 4.

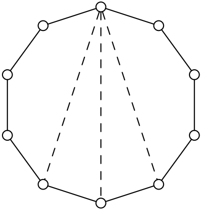
Petersenov graf nie je hamiltonovský



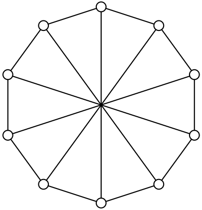
V každom vrchole našej kružnice chýba ešte jedna hrana.

Petersenov graf nie je hamiltonovský

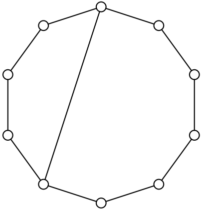
Možnosti pre jeden vrchol:



Petersenov graf nie je hamiltonovský



Petersenov graf nie je hamiltonovský



Petersenov graf nie je hamiltonovský