Diskrétna matematika, kombinatorika, grafy (elementárne poznámky)

Martin Sleziak

17. februára 2025

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tento text je do značnej miery zamýšľaný ako doplnok k predmetu 1-MAT-725 Diskrétna matematika (2). Samozrejme, nie je to tak, že by veci v texte boli úplne totožné s tým, čo sa vyskytne na prednáškach a cvičeniach.

- Nie každý školský rok sa stihne prebrať to isté.
- Navyše sa predmet môže trochu vyvíjať – postupom času možno pribudnú nejaké témy, ktoré budem chcieť pridať. A naopak, niektoré možno vynechám.
- A azda nie je na škodu občas sem dať nejaké veci, ktoré sú zaujímavé a súvisia s preberanou látkou – aj keď na hodine sa prebrať nestihnú.

Tento text sa bude postupom času vyvíjať – čiže verziu, ktorú máte pre sebou, určite nepovažujte za finálnu. V texte takéhoto rozsahu sa určite vyskytnú aj chyby a preklepy; budem sa ich v rámci svojich možností snažiť postupne opravovať.

Na niektorých miestach síce uvediem detailné dôkazy – ale často nejaké dôkazy (najmä jednoduchšie) nechám ako cvičenia. Takisto na veľa miestach pridám iba odkaz na literatúru, kde sa dá nájsť dôkaz.

Aj pri tých tvrdeniach či príkladoch, kde je v texte uvedený dôkaz, je určite pre čitateľa užitočné ak sa najprv samostatne zamyslí nad tým, či by mal aspoň nejaké nápady, ktorým smerom by sa dalo uberať – prípadne či by daný problém vedel vyriešiť aj samostatne. (Aspoň pri tých jednoduchších dôkazoch a úlohách by to určite je zvládnuteľné.)

1.1 Sylaby

Základné kombinatorické princípy, funkcie a podmnožiny, permutácie a faktoriály, binomické koeficienty, princíp inklúzie a exklúzie, kombinatorické identity, pojem grafu, izomorfizmus, súvislosť, eulerovské a hamiltonovské grafy, stromy a kostry, počet stromov, optimálna kostra, rovinné grafy, farbenie grafov a máp.

1.2 Literatúra

1.3 Označenie

Pre číselné množiny budeme používať obvyklé označenie $\mathbb{C}$ pre komplexné čísla, $\mathbb{R}$ pre reálne čísla, $\mathbb{Q}$ pre racionálne čísla. Symbolom $\mathbb{Z}$ budeme označovať množinu všetkých celých čísel.

V tomto texte budeme používať

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{n \in \mathbb{Z}; n > 0\};\\ \mathbb{N}_0 &= \{n \in \mathbb{Z}; n \geq 0\};\end{aligned}$$

t.j. $\mathbb{N}$ je množina všetkých kladných celých čísel a $\mathbb{N}_0$ je množina všetkých nezáporných celých čísel. Inak povedané, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Pravdepodobne ste sa už stretli s tým, že niektoré texty nulu rátajú ako prirodzené číslo, niektoré nie. (A určite je to tak, že v rôznych kontextoch môže byť niektorá z týchto dvoch možností prirodzenejšia. Napríklad ak chceme, aby prirodzené čísla predstavovali veľkosti konečných množín, tak chceme zahrnúť aj nulu ako počet prvkov prázdnej množiny.) Azda takéto označenie – kde priamo v zápise $\mathbb{N}_0$ je vyznačené, že sú to prirodzené čísla *vrátane nuly* – pomôže tomu, aby v tom nebol priveľký zmätok.

Kapitola 2

Kombinatorické princípy

2.1 Sčitovanie a násobenie

2.1.1 Sčítací a násobiaci princíp

Pre ľubovoľné množiny A, B také, že $A \cap B = \emptyset$ platí:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Všeobecnejšie, ak máme množiny $A_1, \dots, A_n$, ktoré sú po dvoch disjunktné, tak

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

T.j. platí

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|,$$

ak $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre všetky $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ také, že $i \neq j$.

Poznámka 2.1.1. Vlastne podobné veci aké tu spomíname pre súčet (súčin, umocnenie) veľkostí konečných množín poznáte z minulého semestra aj pre nekonečné množiny – v takom prípade označenie $|A|$ označuje kardinalitu množiny A. Na tomto predmete sa budeme zaoberať počtami prvkov najmä pre konečné množiny. Určite nie všetky veci, ktoré spomenieme, platia aj pre nekonečné množiny. (Pri niektorých môže byť problém už len ich zmysluplne v kontexte nekonečných množín sformulovať.)

Podobne vieme vypočítať aj počet prvkov karteziánskeho súčinu. T.j. vieme, že platí

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Indukciou to vieme ľahko rozšíriť na

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|.$$

Často však potrebujeme počítať počet prvkov (n-tíc, zoznamov, možností, usporiadaní), kde sa síce nevyskytujú *tie isté* prvky, ale na každej pozícii máme rovnaký počet možností – aj keď to nie sú prvky presne z tej istej množiny.

Tvrdenie 2.1.2 (Násobiaci princíp)**.** *Ak množina A pozostáva z usporiadaných k-tic, pričom na prvej pozícii sa môže vyskytnúť práve n_1 množností a pre každú voľbu $a_1, \dots, a_{j-1}$ máme práve $n - 1$ možností, ktoré sa môžu vyskytnúť na j-tej pozícii, tak počet prvkov množiny A je*

$$|A| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = \prod_{j=1}^{k} n_j.$$

2.1.2 Počet permutácií a podmnožín

Ako ilustráciu násobiaceho princípu môžeme použiť počet permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. T.j. chceme vlastne počítať injektívne zobrazenia $\{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Vyskúšajme to najprv pre $n = 3$. Ak chceme systematicky vypísať všetky permutácie množiny $\{1, 2, 3\}$, môžeme začať tým, že si vyberieme, kam sa zobrazí číslo 1. Máme tri možnosti – jednotku, dvojku, a trojku.

Keď si vyberáme čo zvolíme na druhej pozícii, tak nesmieme zopakovať prvok, ktorí sme už vybrali na prvej pozícii. Teda máme dve možnosti.

Podobná situácia sa zopakuje na tretej pozícii. Teraz máme už dva zakázané prvky, zostala nám jediná možnosť.

Postup, ktorým sme vytvárali permutácie, je ilustrovaný nasledovným stromom. Môžeme si všimnúť, že na každej úrovni je rovnaký počet vetvení – to je presne vlastnosť dôležitá pri násobiacom princípe.

$$\begin{tikzcd}
 & & 12 \arrow[r] & 123 \\
 & 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & 13 \arrow[r] & 132 \\
 & & 21 \arrow[r] & 213 \\
 {} \arrow[uuur] \arrow[r] \arrow[dddr] & 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & 23 \arrow[r] & 231 \\
 & & 31 \arrow[r] & 312 \\
 & 3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & 32 \arrow[r] & 321
\end{tikzcd}$$

Podobne to funguje pre viac prvkov, vidíme teda, že platí:

Tvrdenie 2.1.3. *Počet permutácií množiny n je*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1.$$

Týmto sme súčasne zadefinovali symbol $n!$, ktorý nazývame *faktoriál.* Definitoricky položíme $0! = 0$.

Definícia 2.1.4. Pre $k, n \in \mathbb{N}$ usporiadaný výber k prvkov z n-prvkovej množiny nazývame *variácia k-tej triedy z n prvkov.*

Tvrdenie 2.1.5. *Počet variacií k-tej triedy z n prvkov je*

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1).$$

Rovnaký výsledok dostaneme, ak počítame injektívne zobrazenia $\{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Pretože sa nám takéto niečo bude na viacerých miestach hodiť, zaveďme označenie

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$$
$$x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1) = \prod_{i=0}^{k-1}(x+i)$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. V oboch prípadoch ide o súčin k čísel, pričom začíname číslom x a každý nasledujúci sčítanec je o jedno menší a v druhom prípade o jedno väčší.

Hodí sa nám dodefinovať

$$x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1,$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$. (Je to konzistentné so vzťahmi uvedenými vyššie, keď prázdny súčin berieme ako jednotku.)

Pre $n \in \mathbb{N}$ vieme oba výrazy zapísať pomocou faktoriálov.

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

Zatiaľ sme sa pozerali na počet rôznych výberov, pri ktorých záležalo na poradí. Čo sa stane ak nezáleží na poradí?

Pre $n \in \mathbb{N}_0$ a $k \in \mathbb{Z}$ zaveďme označenie $\binom{n}{k}$ pre počet k-prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Všimnime si, že pre pre $k < 0$ aj pre $k > n$ automaticky máme $\binom{n}{k} = 0$.

{suc:POZNBINOMZAPORNE}

Poznámka 2.1.6. To, že symbol $\binom{n}{k}$ zavádzame aj pre $k < 0$ má zmysel hlavne preto, že nám to zjednoduší zápis niektorých tvrdení a dôkazov – nebudeme musieť zvlášť ošetriť niektoré krajné prípady. (Ale treba si dávať aspoň trochu pozor – nie úplne všetko čo uvedieme bude platiť aj pre záporné k. Určite minimálne pri prvých použitiach tejto konvencie na ňu upozorníme.)

Tvrdenie 2.1.7. *Počet k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny pre $k, n \in \mathbb{N}_0$ je:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{2.1}$$ {suc:EQBINFACT}

Dôkaz. Pre každú k-prvkovú podmnožinu máme $k!$ rôznych usporiadaní. Máme teda dve vyjadrenia pre variácie k-tej triedy z n-prvkov ako

$$k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Z toho dostaneme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

2.1.3 Pascalova identita a Pascalov trojuholník

{suc:VTPASCAL}

Veta 2.1.8. *Pre ľubovoľné $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$ platí:*

{suc:EQPASCAL}

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \tag{2.2}$$

Všimnime si najprv niekoľko špeciálnych prípadov, kedy sú niektoré z uvedených binomických koeficientov nulové:

- Pre $k = 0$ táto rovnosť vlastne hovorí $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$.
- Pre $k = n + 1$ sa táto rovnosť zmení na $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$.
- Pre $k < 0$ aj $k > n + 1$ sú obe strany nulové.

Teda nám zostáva zdôvodniť túto rovnosť v prípade, že $1 \leq k \leq n$. (Ako sme už spomenuli v poznámke 2.1.6, zahrnutie aj týchto triviálnych prípadov nám zjednoduší aj formuláciu tvrdenia ale je užitočné aj pri zápise niektorých dôkazov.)

Rovnosť (2.2)

Dôkaz. Vieme, že $\binom{n+1}{k}$ vyjadruje počet všetkých k-prvkových podmnožín množiny $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Podmnožiny $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ môžeme rozdeliť na dve časti:

- Tie, ktoré obsahujú nulu. Okrem nuly takéto množiny ešte musia obsahovať $k-1$ prvkov z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$; je ich teda práve $\binom{n}{k-1}$.
- Ak $0 \notin A$, tak A je podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Takýchto podmnožín je práve $\binom{n}{k}$.

Spolu máme teda $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ takýchto podmnožín.

Samozrejme, obe vyjadrenia pre počet k-prvkových podmnožín množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ sa musia rovnať, a teda platí

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

□

V predchádzajúcom dôkaze sme využili sčítací princíp keď sme náš systém k-prvkových podmnožín rozdelili na dve disjunktné časti. Kvôli stručnosti označme ako P_k množinu všetkých k-prvkových podmnožín $\{0, 1, \ldots, n\}$. Potom vlastne celý dôkaz môžeme stručne zapísať ako:

$$P_k = \{A \in P_k; 0 \in A\} \cup \{A \in P_k; 0 \notin A\}$$
$$|P_k| = |\{A \in P_k; 0 \in A\}| \cup |\{A \in P_k; 0 \notin A\}|$$
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Pre $1 \leq k \leq n$ by sme mohli tvrdenie zdôvodniť aj tak, že použijeme vyjadrenie $\binom{n}{k}$ pomocou faktoriálov a pokúsime sa ho upraviť.

Dôkaz algebraickými úpravami. Jednoducho sa pozrieme na to, ktoré členy sa vyskytujú v $\binom{n}{k}$ aj $\binom{n}{k-1}$ a pokúsime sa ich vyňať.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{n-k+1} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n+1}{(n-k+1)k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Skutočne sme dostali, že výrazy na oboch stranách sa rovnajú. □

Všimnime si, že spolu s rovnosťami $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ vieme pomocou rovnosti (2.2) dostať každý hodnoty ostatných binomických koeficientov $\binom{n}{k}$ pre $0 < k < n$. Zvykneme tieto binomické koeficienty zapisovať do schémy známej ako *Pascalov trojuholník*.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Dal by sa nakresliť aj takto:

$$\begin{array}{llllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
1 & 3 & 6 & 10 & & \\
1 & 4 & 10 & & & \\
1 & 5 & & & & \\
1 & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \binom{5}{0} \\
\binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \\
\binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & & \\
\binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & & & \\
\binom{4}{4} & \binom{5}{4} & & & & \\
\binom{5}{5} & & & & &
\end{array}$$

2.1.4 Počet zobrazení

TODO

$$\{f\colon A \to B\} = |B|^{|A|}$$

{suc:POZNONAO}

Poznámka 2.1.9. TODO $0^0 = 1$

2.1.5 Rôzne príklady využívajúce sčítací a násobiaci princíp

2.2 Bijekcia

{bij:VTDVANAN}

Veta 2.2.1. *Počet všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je 2^n.*
Počet všetkých podmnožín ľubovoľnej n-prvkovej množiny je 2^n.

Druhá časť uvedenej vety znie výrazne všeobecnejšie ako prvá – nie je ťažké si uvedomiť, že dve n-prvkové množiny musia mať aj rovnaký počet podmnožín. (Alebo všeobecnejšie, ľubovoľná bijekcia $X \to Y$ nám automaticky dáva aj bijekciu $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$.)

Jedna možnosť ako dokázať výsledok o počte podmnožín n-prvkovej množiny by bola matematickou indukciou.

Dôkaz matematickou indukciou. Označme ako p_n počet podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$

1° Vyššie sme už skontrolovali, že platí $p_0 = 1 = 2^0$ a $p_1 = 2 = 2^1$.

2° Na zdôvodnenie indukčného kroku nám pre $n \geq 1$ stačí dokázať

$$p_n = 2p_{n-1}.$$

Zdôvodnenie tohto vzťahu ponecháme ako cvičenie (úloha 2.2.1). □

TODO

Dôkaz. TODO

$$\mathcal{P}(M) \to \{0, 1\}^M$$

$$A \mapsto \chi_A$$

Symbol χ_A označuje *charakteristickú funkciu* množiny A, t.j. funkciu $\chi_A\colon M \to \{0, 1\}$ definovanú ako

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \notin A. \end{cases}$$

□

Cvičenia

ULOPNDVAKRAT}

Úloha 2.2.1. Označme ako p_n počet všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n = 2p_{n-1}$. (Hint: Koľko je podmnožín takých, že $1 \in A$? Koľko je podmnožín takých, že $1 \notin A$?)

2.3 Počítanie dvoma spôsobmi

Pri dôkaze rôznych kombinatorických identít sa často dá použiť prístup, kde ukážeme, že ľavá aj pravá strana dokazovanej rovnosti predstavujú počet prvkov tej istej množiny – len vypočítaný iným spôsobom. My si túto metódu ukážeme konkrétne na dvoch identitách týkajúcich sa binomických koeficientov:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$
$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Tieto dve rovnosti ukážeme ako rovnosť (2.3) vo vete 2.3.1 a rovnosť (2.4) v tvrdení 2.3.2.

2.3.1 Súčet riadku Pascalovho trojuholníka

{dvoma:VTSUMDVANAN}

Veta 2.3.1. *Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{2.3}$$

{dvoma:EQSUMDVANAN}

Táto rovnosť vlastne predstavuje súčet všetkých čísel v riadku n Pascalovho trojuholníka. Ak si človek vyskúša zrátať tento súčet pre niekoľko prvých riadkov, tak by určite uhádol, že sa výsledok vždy zdvojnásobuje.

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+1 &= 2\\
1+2+1 &= 4\\
1+3+3+1 &= 8\\
1+4+6+4+1 &= 16\\
1+5+10+10+5+1 &= 32\\
1+6+15+10+20+15+6+1 &= 32
\end{aligned}$$

Možno sa aj dá zbadať – ak si uvedomíme ako súvisia prvky v dvoch po sebe idúcich riadkoch – že máme v nasledujúcom riadku vždy dvakrát tie čísla, ktoré sa vyskytli v predošlom riadku:

$$\begin{gathered}
1+4+6+4+1 = 16\\
1+(1+3)+(3+3)+(3+1)+1 = 8+8
\end{gathered}$$

V uvedenej rovnosti sú čísla zvýraznené dvomi farbami aby bolo vidno, že sme rozdelili každý binomický koeficient na časť, ktorá je v predchádzajúcom riadku naľavo a napravo. Každé číslo z tretieho riadku sa vo štvrtom riadku (po takomto prepísaní) objaví dvakrát – raz v jednej farbe a raz v druhej.

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 1+3 & & 3+3 & & 3+1 & & 1 \end{array}$$

Dôkaz matematickou indukciou. Dokážeme rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

pre $n \in \mathbb{N}_0$ matematickou indukciou vzhľadom na n.

1° Pre $n = 0$ aj $n = 1$ uvedená rovnosť platí:

$$\binom{0}{0} = 1 = 2^0$$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1$$

2° Predpokladajme, že uvedená rovnosť platí pre n. Pre $n + 1$ dostaneme:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&\overset{IP}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

V jednom z krokov sme vynechali nulové členy $\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0$ a skrátili tak sumu o jeden člen. (Opäť pripomeniem konvenciu, na ktorú sme upozornili v poznámke 2.1.6.) □

Na tomto mieste sme však tento výsledok uviedli z toho dôvodu, že na ňom chceme ilustrovať inú metódu, ktorá sa dá použiť aj pri dôkazoch mnohých iných kombinatorických identít. Ak o ľavej aj pravej strane nejakej rovnosti ukážeme, že predstavujú počet prvkov tej istej množiny, tak je jasné, že sa musia rovnať.

Dôkaz. Vieme, že počet podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je rovný 2^n (veta 2.2.1).

Tieto podmnožiny môžeme rozdeliť podľa počtu prvkov na 0-prvkové, jednoprvkové, dvojprvkové, atď. Počet k-prvkových podmnožín je práve $\binom{n}{k}$, pričom tento počet môže byť nenulový iba pre $k = 0, 1, \ldots, n$. Dostávame teda

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

□

Obe strany tejto rovnosti vyjadrujú počet všetkých podmnožín n-prvkovej množiny.

2.3.2 Binomické koeficienty po diagonále – hokejková identita

Úspešne sa nám podarilo zdôvodniť, že

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Vieme, čomu sa rovná súčet všetkých binomických koeficientov, kde vystupuje rovnaký horný index.

Čo ak by sme počítali súčty, kde nechávame rovnaký dolný index. T.j. zafixujeme si nejaké číslo k a počítame súčet

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = ?$$

Vynechali sme sčítance $\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{k-1}{k}$, ktoré sú nulové. Sumu sme ukončili pre nejakom čísle n – na rozdiel od prípadu so súčtom v riadku, tu by sme mohli dostať súčet nekonečne veľa kladných čísel, tak by sme chceli sčítať *všetky* takéto binomické koeficienty.

T.j. napríklad by sme chceli vedieť vyjadriť súčty

$$\begin{aligned}
\binom{3}{3} + \binom{4}{3} &= ?\\
\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} &= ?\\
\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} &= ?\\
\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} &= ?
\end{aligned}$$

V Pascalovom trojuholníku sa teda v tomto prípade pohybujeme po diagonále, t.j. sčítavame prvky vyznačené na nasledujúcom obrázku:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \color{red}{\binom{3}{3}} & & & & & \\
 & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \color{red}{\binom{4}{3}} & & \binom{4}{4} & & & & \\
 & & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \color{red}{\binom{5}{3}} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & \\
 & & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \color{red}{\binom{6}{3}} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & & \\
 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} & \\
\binom{8}{0} & & \binom{8}{1} & & \binom{8}{2} & & \binom{8}{3} & & \binom{8}{4} & & \binom{8}{5} & & \binom{8}{6} & & \binom{8}{7} & & \binom{8}{8}
\end{array}$$

Ak pre tento prípad naozaj vypočítame, čomu sa tieto súčty rovnajú, tak dostaneme tieto výsledky:

$$\begin{aligned}
1 + 4 &= 5\\
1 + 4 + 10 &= 15\\
1 + 4 + 10 + 20 &= 35\\
1 + 4 + 10 + 20 + 35 &= 70
\end{aligned}$$

Pri počítaní nezaškodí mať niekde poruke Pascalov trojuholník – z neho vyčítame hodnoty jednotlivých binomických koeficientov asi pomerne rýchlo.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

Toto bol prípad $k = 4$. Môžeme podobné súčty vyskúšať aj pre iné hodnoty, ako napríklad $k = 3$:

$$
\begin{aligned}
1 + 3 &= 4 \\
1 + 3 + 6 &= 10 \\
1 + 3 + 6 + 10 &= 20 \\
1 + 3 + 6 + 10 + 15 &= 35
\end{aligned}
$$

Ďalšie experimentovanie už nechám na Vás, ale možno po pár pokusoch by sa už malo dať uhádnuť, ako bude vyzerať výsledok.

{dvoma:TVRHOKEJ}

Tvrdenie 2.3.2 (Hokejková identita)**.** *Pre ľubovoľné $k, n \in \mathbb{N}_0$ platí:*

{dvoma:EQHOKEJ}

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{2.4}$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

Samozrejme, keďže Pascalov trojuholník je symetrický, mohli by sme všetky sčítance symetricky otočiť.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

Zo symetrie je evidentné, že aj nasledujúce sumy predstavujú tú istú rovnosť, len inak vyjadrenú:

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{j-k}=\binom{n+1}{k+1}$$
$$\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{n-k}$$
$$\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{j-k}=\binom{n+1}{n-k}$$

Z Pascalovho trojuholníka resp. opakovaným použitím Pascalovho pravidla sa dá asi aj zbadať jeden možný argument, prečo takáto rovnosť platí. Opäť to skúsme ilustrovať najprv na konkrétnom príklade:

$$\begin{aligned}1+4+10+20&=35\\ 5+10+20&=35\\ 15+20&=35\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}&=\binom{7}{4}\\ \binom{4}{4}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}&=\binom{7}{4}\\ \binom{5}{4}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}&=\binom{7}{4}\\ \binom{6}{4}+\binom{6}{3}&=\binom{7}{4}\end{aligned}$$

V každom kroku sme vlastne nahradili súčet dvoch susedných binomických koeficientov zodpovedajúcim binomickým koeficientm z ďalšieho riadku.

To isté je naznačené na nasledujúcich obrázkoch – v každom z nich sú červenou farbou vyznačené čísla, ktoré dávajú ten istý súčet ako $1+4+10+20$; pričom v každom kroku sa jedným použitím Pascalovho pravidla počet čísel znížil o jedno.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad \color{red}{4} \quad \color{red}{1}\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad \color{red}{10} \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad \color{red}{20} \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad \color{blue}{35} \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad \color{red}{10} \quad \color{red}{5} \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad \color{red}{20} \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad \color{blue}{35} \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad \color{red}{20} \quad \color{red}{15} \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad \color{blue}{35} \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

Asi by ste vedeli urobiť dôkaz matematickou indukciou, ktorý využíva na vhodnom mieste Pascalovo pravidlo. (Oplatí sa vyskúšať si nejaký dôkaz indukciou spraviť aj samostatne.)

Dôkaz matematickou indukciou. Dokážeme platnosť rovnosti (2.4), t.j. dokazujeme, že platí rovnosť

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

indukciou vzhľadom na n (pre ľubovoľné k).

1° Ak $n = 0$, tak pre $k = 0$ máme rovnosť

$$\binom{0}{0} = \binom{1}{1},$$

ktorá skutočne platí. Pre $k > 0$ máme na ľavej strane nulu (súčet nula sčítancov). Na pravej strane dostaneme binomický koeficient $\binom{1}{k+1}$, ktorý sa tiež rovná nule, lebo $k + 1 > 1$.

Môžeme sa pozrieť aj na prípad $n = 1$. TODO

2° Prepokladajme, že tvrdenie platí pre n. Chceme sa pozrieť na tú istú sumu pre $n+1$. Dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{n+1}\binom{j}{k} &\overset{IP}{=} \binom{n+1}{k}+\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}\\ &= \binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{k+1}\\ &= \binom{n+2}{k+1}.\end{aligned}$$

Dokázali sme, že potom tvrdenie platí aj pre $n+1$. □

{POZNMIDVEPREMENNE}

Poznámka 2.3.3. Pomerne bežne sa stane, že sa snažíme matematickou indukciou dokázať pre všetky prirodzené čísla dokázať nejaký výrok $V(n,k)$, ktorý závisí od dvoch premenných. Vtedy sa zvyčajne treba zamyslieť nad tým, že ako to budeme dokazovať. Môžeme si napríklad vybrať, či dokazujeme tvrdenie indukciou na n alebo na k, t.j. dokazujeme niektorý z výrokov:

$$\begin{aligned}P_1(n) &\equiv (\forall k)V(n,k)\\ P_2(k) &\equiv (\forall k)V(n,k)\end{aligned}$$

A často sa môže vyskytnúť situácia, kedy sa človeku hodí niečo úplne iné; napríklad zaviesť nejakú pomocnú premennú a dokazovať to indukciou vzhľadom na ňu. (Ako trebárs $s=\max\{n,k\}$ alebo $t=l+k$.) Obvykle ak sa človek pokúsi urobiť nejakým spôsobom indukčný krok, tak pritom môže prísť na to, čo by mu mohlo pomôcť.

V predchádzajúcom dôkaze sme zvolili mali dve premenné n a k, zvolili sme indukciou vzhľadom na n. Môžete si vyskúšať, že pokus dokázať tvrdenie v podobe ako je sformulované (2.4) nevyzerá byť úplne priamočiary.

Poďme sa však pozrieť na to, či by sme tú istú identitu vedeli dokázať aj použitím kombinatorickej interpretácie binomických koeficientov – opäť tu chceme ilustrovať počítanie dvoma spôsobmi.

Dôkaz. Počet $(k+1)$-prvkových podmnožín množiny $\{0,1,2,\dots,n\}$ je $\binom{n+1}{k+1}$.

Rozdeľme tieto množiny podľa toho, ktorý prvok je najväčší vybratej podmnožiny; môžeme si ho rovno označiť ako $j=\max A$. Keďže chceme $k+1$ prvkov, ako najväčší prvok sa môžu vyskytnúť iba $j=k,\dots,n$. (Najmenšie možné j dostaneme ak vyberieme $k+1$ najmenších možných prvkov, t.j. pre podmnožinu $\{0,1,\dots,j\}$.)

Ak si zafixujeme j, koľko je možností ako vybrať $(k+1)$-prvkovú podmnožinu, ktorej najväčším prvkom je j? Je to to isté, ako vyberať k-prvkovú podmnožinu množiny $\{0,1,\dots,j-1\}$, teda máme $\binom{j}{k}$ možností. Zistili sme teda, že počet všetkých $(k+1)$-prvkových podmnožín môžeme vyjadriť aj ako $\sum\limits_{j=k}^{n}\binom{j}{k}$, a teda dostávame rovnosť

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

□

Môžeme si všimnúť, z (2.4) vieme pomerne ľahko dostať aj vzťah pre súčet nejakého úseku diagonály Pascalovho trojuholníka, ktorý nezačína hneď od okraja. Stačí nám odčítať tieto dve rovnosti:

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$
$$\sum_{j=k}^{s-1}\binom{j}{k}=\binom{s}{k+1}$$

a dostaneme

$$\sum_{j=s}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}-\binom{s}{k+1}.$$

Túto rovnosť môžeme ekvivalentne vyjadriť aj ako

$$\binom{s}{k+1}+\sum_{j=s}^{n}\binom{j}{k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Skúsme tú istú rovnosť prepísať ešte aj trochu inak - nie pomocou premenných s a n určujúcich začiatok a koniec úseku, ktorý sčitujeme, ale tak, že v rovnosti bude vystupovať dĺžka sčitovaného úseku.

{dvoma:EQHOKEJUSEK}

$$\begin{gathered}\sum_{j=s}^{s+l-1}\binom{j}{k}=\binom{s+l}{k+1}-\binom{s}{k+1}\\ \binom{s}{k+1}+\sum_{j=s}^{s+l-1}\binom{j}{k}=\binom{s+l}{k+1}\end{gathered}\tag{2.5}$$

V takejto podobe vieme túto rovnosť pomerne pohodlne dokázať indukciou vzhľadom na l:

Dôkaz. 1° Pre $l=0$ dostaneme

$$\binom{s}{k+1}=\binom{s}{k+1}.$$

Pre $l=1$ máme

$$\binom{s}{k+1}+\binom{s}{k}=\binom{s+1}{k+1},$$

čo je presne Pascalova identita.

2° Predpokladajme, že platí rovnosť (2.5), chceme ukázať zodpovedajúcu rovnosť pre $l+1$. Dostaneme:

$$\begin{aligned}\binom{s}{k+1}+\sum_{j=s}^{s+l}\binom{j}{k}&=\binom{s}{k+1}+\sum_{j=s}^{s+l-1}\binom{j}{k}+\binom{s+l}{k}\\ &\overset{IP}{=}\binom{s+l}{k+1}+\binom{s+l}{k}\\ &=\binom{s+l+1}{k+1}.\end{aligned}$$

To je presne rovnosť, ktorú sme mali dokázať. □

Vlastne sme rovnosť (2.4) resp. (2.5) dokazovali matematickou indukciou trikrát. Dôvod, prečo sme uviedli aj tento tretí dôkaz, je ten, že takto sformulovaný dôkaz sa asi najviac podobá na obrázky, ktoré sme kreslili, keď sme začali rozmýšľať o takýchto súčtoch. Napríklad na jednom obrázku sme mali naznačený súčet:

$$5+10+20=35$$
$$\binom{5}{4}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}=\binom{7}{4}$$

Toto je naozaj špeciálny prípad identity (2.5) pre $s=5$, $k=3$, $l=2$. A snažili sme sa spomenuté obrázky nakresliť tak, aby sa z nich dal vidieť nejaký všeobecný argument pre túto rovnosť. Na každom z obrázkov sme mali červenou farbou vyznačenú ľavú stranu a modrou farbou prevú stranu rovnosti $\binom{s}{k+1}+\sum\limits_{j=s}^{s+l-1}\binom{j}{k}=\binom{s+l}{k+1}$ pre nejaké k, l, s.

Cvičenia

Úloha 2.3.1. Ukážte, že rovnosť

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2.6}$$ {principycvic:EQTRIANGLE

sa dá dostať ako špeciálny prípad hokejkovej identity (2.4).

{ULOSUMSTVORCEDVOMA}

Úloha 2.3.2. [E, 5.E15] Ukážte, že počet usporiadaných trojíc (x,y,z) takých, že $x,y,z\in\{1,2,\dots,n+1\}$ a $z>\max\{x,y\}$ sa dá dvoma spôsobmi vyjadriť ako

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}.$$

Poznáte nejaké iné vyjadrenia pre súčet prvých n druhých mocnín? Zhoduje sa výsledok s tým, čo vyšlo tu?

{ULOSUMSTVORCEHOKEJ}

Úloha 2.3.3. Vedeli by ste dostať nejaké vyjadrenie pre $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$ využitím rovností $k^2=2\binom{k}{2}+k$ resp. $k^2=2\binom{k+1}{2}-k$?

{ULOSUMSTVORCEHOKEJ2}

Úloha 2.3.4. Vedeli by ste dostať nejaké vyjadrenie pre $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$ využitím $k^2=\binom{k}{2}+\binom{k-1}{2}$?

{ULOBINOMSYM}

Úloha 2.3.5. Zdôvodnite, že $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. (Pre všetky prípustné hodnoty k a n.)

Úloha 2.3.6. Koľko je štvorciferných čísel, kde všetky cifry sú párne?
Koľko z nich je deliteľných štyrmi?

Úloha 2.3.7. Koľko sa dá zostaviť 5-ciferných kódov používajúcich číslice $\{0,1,2,\dots,9\}$ takých, kde práve n cifier je nepárnych.

Úloha 2.3.8. Koľko sa dá zostaviť 5-ciferných kódov používajúcich číslice $\{0,1,2,\dots,9\}$ takých, kde sa *práve jedna* cifra opakuje dvakrát (a všetky ostatné sú rôzne).

T.j. napríklad 01023, 22469, 12341 sú možnosti, ktoré chceme započítať. Ale možnosti ako 12345, 01234 nepočítame (neopakuje sa nič), takisto ani 00112, 01210 (dve opakujúce sa cifry) a ani 82818, 24144 (tu sú tri opakovania niektorej cifry).

Úloha 2.3.9. Koľkými spôsobmi môžeme položiť tri
a) rovnaké
b) rôzne
šachové figúrky na štandardnú šachovnicu 8×8, ak sa žiadne z nich nesmú nachádzať v tom istom riadku ani v tom istom stĺpci.

Úloha 2.3.10. Dvanásť študentov sa pripravuje na štátnice a chcú sa rozdeliť na tri skupiny: Dvaja vypracujú otázky z kombinatoriky, piati vypracujú otázky z matematickej analýzy, piati vypracujú otázky z lineárnej algebry. Koľkými spôsobmi sa môžu rozdeliť?

Úloha 2.3.11. Koľkými spôsobmi je možné vybrať 11-členný futbalový tím a 5-členný basketbalový tím z 30-tich študentov, ak
a) Nikto nebude v oboch tímoch.
b) Ľubovoľný počet študentov môže byť v oboch tímoch.
c) Najviac jeden študent bude v oboch tímoch.

Úloha 2.3.12. Senát pozostáva zo 100 senátorov z 50-tich štátov, každý štát je reprezentovaný dvomi senátormi. Koľkými spôsobmi je možné zvoliť štvorčlenný výbor keď požadujeme, aby vo výbore neboli dvaja senátori z toho istého štátu?

Úloha 2.3.13. Chceme vybrať 6 členov disciplinárnej komisie spomedzi štyroch študentov a ôsmich učiteľov. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť, ak v komisii musia byť aspoň traja študenti?

Úloha 2.3.14. Máme štandardný balíček 52 kariet (t.j. $\{A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K\} \times \{\clubsuit,\blacklozenge,\spadesuit,\heartsuit\}$). Koľkými spôsobmi sa dá vybrať 10 kariet tak, aby sme všetky karty mali rôznej hodnoty. (T.j. nevyskytnú sa dve esá, dve dvojky, atď.)

Úloha 2.3.15. Desať študentov sedí v jednom rade. Pretože Harry a Hermiona neustále vyrušovali, nesmú sedieť vedľa seba. Koľkými spôsobmi sa vedia študenti usadiť?

Aký počet možností dostanem, ak mám troch študentov, z ktorých žiadni dvaja nesmú sedieť vedľa seba?

rincipicvic:ULOBINOMN-3}

Úloha 2.3.16. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

(Návod: Pozerajte sa na podmnožiny vhodnej množiny, ktoré obsahuje tri zvolené prvky.)

Úloha 2.3.17. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{2}m + \binom{m}{2}n = \binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}.$$

(Hint: Môžete sa pozerať na výber trojčlennej komisie spomedzi m mužov a n žien.)

Úloha 2.3.18. Overte výpočtom aj kombinatorickou úvahou rovnosť:

$$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}.$$

Kapitola 3

Výber s opakovaním

3.1 Kombinácie a permutácie s opakovaním

Videli sme, že binomické koeficienty počítajú počet rôznych výberov (pri ktorých nezáleží na poradí) a vedeli sme tiež počítať počet usporiadaní k prvkov z nejakej n-prkovej množiny (t.j. situácia, kde sme brali ohľad aj na poradie).

Niekedy však môže nastať aj situácia, kedy môžeme niektorý prvok vybrať viackrát. (A opäť sa môže stať, že nám záleží alebo nezáleží na poradí.)

Príklady situácií, kedy sa môžeme na niečo takéto pozerať:

- Chceme objednať n kníh, pričom môžeme vyberať zo štyroch knižných titulov. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?
- Počas týždňa chceme mať dvakrát konzultácie z matematickej analýzy, dvakrát z lineárnej algebry a raz z diskrétnej matematiky – každý deň práve jedno z nich. Koľko rôznych rozvrhov na týždeň sa dá naplánovať.

Postupne si rozmyslíme, že úlohy takéhoto druhu vieme pomerne ľahko vyriešiť.

3.1.1 Permutácie s opakovaním

Definícia 3.1.1. Ak máme k dispozícii prvky k rôznych typov, pričom počty prvkov jednotlivých typov sú $n_1, \dots, n_k$ a celkový počet je $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. O *permutáciach s opakovaním* hovoríme, ak sa pozeráme na všetky možné takéto usporiadania.

Čiže rozdiel oproti tomu, o čom sme hovorili pri permutáciach, je že teraz sa môže jeden prvok vyskytnúť viackrát.

Zoberme si príklad, ktorý sme už uviedli vyššie – na každý pracovný deň v týždni si chceme naplánovať práve jeden z predmetov matematická analýza, lineárna algebra, diskrétna matematika; pričom chceme mať analýzu aj lineárku dvakrát a diskrétku raz. T.j. zmysluplné usporiadania sú napríklad $DLLMM$ alebo $MLMLD$.

Pomerne ľahko vieme prísť na to, aký je počet permutácií s opakovaním – niekedy sa pre tento počet používa aj označenie nazývané *multinomický koeficient.*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \tag{3.1}$$ {opak:EQMULTKOEF}

Na to, že takýto počet sa skutočne rovná uvedenej hodnote môžeme prísť napríklad takouto úvahou: Pre n prvkov máme $n!$ možných usporiadaní, ak by sme sa pozerali na n_i

prvkov i-teho typu ako na rôzne prvky. Pretože však prvky i-teho typu nerozlišujeme $n_i!$ preusporiadaní týchto prvkov dáva to isté. Túto úvahu zopakujeme pre každý typ.

Keď sa opäť vrátime k príkladu s predmetmi, tak pre každé usporiadanie prvkov M_1, M_2, L_1, L_2, D chceme 2!2! z nich stotožniť, pretože nerozlišujeme M_1 od M_2 a ani L_1 od L_2. Napríklad všetky štyri usporiadania $DL_1L_2M_1M_2$, $DL_1L_2M_2M_1$, $DL_2L_1M_1M_2$, $DL_2L_1M_2M_1$ všetky zodpovedajú tomu $DLLMM$.

Skúsme sa ešte na ten istý problém pozrieť iným spôsobom. Máme n pozícii, na ktoré chceme poukladať naše prvky. Máme $\binom{n}{k_1}$ možností ako vybrať pozície pre prvky prvého typu. Zostalo nám $n-k_1$ pozícií, pre ne máme $\binom{n-k_1}{k_2}$ možností výberu pozícií. Dostaneme takto

$$\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}=\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\ldots-k_{n-2}}{k_{n-1}}\binom{n-k_1-\ldots-k_{n-2}-k_{n-1}}{k_n}.$$

Môžete sa presvedčiť o tom, že je to iba iné vyjadrenie toho istého čísla.

Príklad 3.1.2. Koľko rôznych reťazcov sa dá vytvoriť preusporiadaním písmen slova DETERMINANT? Koľko reťazcov takto dostaneme pomocou písmen slova MATEMATIKA?

V slove determinant máme jedenásť písmen, pričom je tam dvakrát D, dvakrát E, dvakrát N a ostatné iba raz. Dostaneme teda $\frac{11!}{2!2!2!}=\frac{11!}{8}$ rôznych reťazcov.

V slove matematika je desať písmen, pričom A sa opakuje trikrát, M aj T sú tam dvakrát a ostatné raz. Teda máme $\frac{10!}{3!2!2!}$ možností.

3.1.2 Kombinácie s opakovaním

Pozriem sa teraz na úlohu iného typu. Máme n-prvkovú množinu. Chceme vybrať k prvkov, pričom môžeme vybrať niektorý prvok viackrát a nezáleží nám na poradí. Budeme hovoriť o *kombináciách k-tej triedy z n prvkov s opakovaním.*

Príklad 3.1.3. Chceme dokúpiť do katedrovej knižnice tri knihy; hodia sa nám tituly A, B, C. (Pričom môžeme kúpiť aj viacero kusov tej istej knihy – napríklad môžeme vybrať $2\times A$ a B.)

Naschvál sme vybrali veľmi malé čísla, aby to bol prípad, kde sme schopní vypísať aj všetky možnosti. Ale o chvíľu sa zamyslíme nad tým, ako takýto typ úlohy riešiť všeobecne.

Skúsme ich vypisovať nejako systematicky – vybrali sme niekoľko A-čko, niekoľko B-čok, niekoľko C-čok; tak ich vypisujme v poradí, že najprv vypíšeme A-čka, potom B-čka, potom C-čka.

$$\begin{gathered}AAA\\AAB\\AAC\\ABB\\ABC\\ACC\\BBB\\BBC\\BCC\\CCC\end{gathered}$$

Dostali sme práve 10 možností. (Skúste sa presvedčiť o tom, že sme žiadnu možnosť nevynechali.)

Čo sa stane, ak by sme nevyberali tri knihy ale n kníh?

Vlastne chceme spočítať počet možností, koľkými spôsobmi môžeme zapísať taký reťazec, ako sme uviedli vyššie – máme na n pozíciách písmená A, B, C; pričom píšeme najprv A-čka, potom B-čka, potom C-čka. Skúsme ich zapísať takým spôsobom, že medzi A-čka a B-čka aj medzi B-čka a C-čka pridáme oddeľovač (zarážku). Napríklad možnosti, ktoré sme vypísali vyššie pre $n = 3$ by sme zapísali ako:

$$
\begin{gathered}
AAA||\\
AA|B|\\
AA||C\\
A|BB|\\
A|B|C\\
A||CC\\
|BBB|\\
|BB|C\\
|BC|C\\
||CCC
\end{gathered}
$$

(Zvislú čiaru sme nakreslili vždy medzi všetky A-čka a všetky B-čka; pričom niektorých z nich môže byť nula. To isté pre B-čka a C-čka.)

Ak rátame pozície, na ktorých sú naše tri písmená a zarážky, tak máme celkovo 5 pozícií a 2 zarážky. Pritom každý výber pozícií na ktoré dáme zaáržky nám jednoznačne určuje reťazec, ktorý nás zaujíma. Napríklad z ␣|␣␣| vieme vyčítať, že ide o $A|BB|$, t.j. máme jedenkrát A, 2-krát B a 0-krát C.

Všeobecne, keď máme vybrať n kníh, tak máme $n + 2$ pozícií a z nich máme vybať dve pre zarážky; dostaneme teda $\binom{n+2}{2}$ možných výberov.

{opak:TVRKOMB}

Tvrdenie 3.1.4. *Počet kombinácii s opakovaním k-tej triedy z n prvkov je rovný*

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Na tomto mieste sa možno oplatí spomenúť, že v literatúre sa môžete stretnúť aj s označením $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Tiež si môžeme všimnúť, že s použitím známeho vzťahu pre binomické koeficienty vieme toto číslo prepísať ako

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!},$$

čo je vyjadrenie, ktoré sa azda trochu podobá na $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$; rozdiel je ten, že tu berieme súčin k čísel začínajúcich od n a *stúpajúcich.*

Dôkaz. Rovnakou úvahou, ktorú sme spomenuli vyššie, vieme prísť na to, že máme medzi n pozícii pridať $k-1$ oddeľovačov. Celkovo máme teda (pre prvky aj pre oddeľovače) $n+k-1$ pozícií, vyberáme $k-1$ pozícii na ktorých sú oddeľovače. Máme teda $\binom{n+k-1}{k-1}$ možností. Na základe symetrie (pozri (4.1) resp. úlohu 2.3.5) môžeme to isté kombinačné číslo prepísať aj ako $\binom{n+k-1}{n}$. □

V angličtine sa často stretnete s názvom *stars and bars* – t.j. namiesto diagramu ␣|␣␣|, ktorý sme uviedli vyššie, by sme ten istý výber znázornili ako $*|**|$.

Toto tvrdenie by sme vedeli dokázať aj indukciou – opäť tu máme niečo kde vystupujú dve premenné n a k, treba si rozumne vybrať ako nastaviť indukciu (poznámka 2.3.3).

Dôkaz. TODO dopísať poriadnejšie

TODO Vyberáme z $\{1, 2, \dots, n\}$ a rozdelíme podľa toho, či sa vo výbere vyskytne alebo nevyskytne jednotka.

$$K'(n,k) = K'(n-1,k) + K'(n,k-1)$$
$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k-2}$$

□

Cvičenia

Úloha 3.1.1. Ukážte, že pre $n_1, \dots, n_k$ také, že $n_1 + n_2 \cdots + n_k = n$ platí

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-\ldots-k_{n-2}}{k_{n-1}}\binom{n-k_1-\ldots-k_{n-2}-k_{n-1}}{k_n} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Úloha 3.1.2. Koľko rôznych reťazcov sa dá vytvoriť permutovaním písmen slova HALABALA?

Úloha 3.1.3. Koľko 7-ciferných čísel sa dá vytvoriť pomocou cifier 1, 2, 3, ak každá z nich musí byť použitá aspoň dvakrát?

Úloha 3.1.4. Zdôvodnite, že pre každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\frac{(3k)!}{6^k}$ celé číslo, t.j. $6^k \mid (3k)!$.

3.2 Počet celočíselných riešení $x_1 + \cdots + x_k = n$

{celocries:SECT}

{celocries:TVRPOCET}

Pozrime sa ešte na iný typ úlohy, ktorý úzko súvisí s kombináciami s opakovaním.

Tvrdenie 3.2.1. *Pre dané $k, n \in \mathbb{N}_0$ je počet riešení rovnice*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

takých, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 0$, je rovný

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Dôkaz. TODO tvrdenie 3.1.4 □

{celocries:PRIKL} Skúsme nejaký malý príklad, kde by sme mali zvládnuť vypísať aj všetky možnosti.

Príklad 3.2.2. Koľko je celočíselných riešení $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ takých, že $x_{1,2,3} \geq 0$?

Podľa uvedenej vety by ich malo byť $\binom{7}{2} = 21$. Ak ich skúsime nejakým spôsobom systematicky vypisovať, tak skutočne dostaneme práve 21 možností.

$0+0+5$	$1+1+3$	$2+3+0$
$0+1+4$	$1+2+2$	$3+0+2$
$0+2+3$	$1+3+1$	$3+1+1$
$0+3+2$	$1+4+0$	$3+0+2$
$0+4+4$	$2+0+3$	$4+0+1$
$0+5+0$	$2+1+2$	$4+1+0$
$1+0+4$	$2+2+1$	$5+0+0$

Chceli by sme sa pozrieť na riešenia úloh podobného typu, kde sa vyskytnú aj iné obmedzenia ako $x_i \geq 0$. Prinajmenšom pomerne prirodzene vyzerá napríklad niečo také, že by sme chceli $x_i \geq 1$ (t.j. nie riešenia v nezáporných celých číslach, ale v kladných celých číslach).

Takýto typ úlohy však vieme ľahko transformovať na úlohu, pre ktorú poznáme odpoveď z tvrdenia 3.2.1.

{celocries:PRIKLPOSUN}

Príklad 3.2.3. Koľko je celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$$

takých, že $x_{1,2} \geq 1$ a $x_{3,4} \geq 2$?

Stačí nám zaviesť nové premenné $y_1 = x_1 - 1$, $y_2 = x_2 - 1$, $y_3 = x_3 - 2$, $y_4 = x_4 - 2$. Pôvodné obmedzenia zodpovedajú tomu, že teraz hľadáme celočíselné hodnoty také, že $y_i \geq 0$, dostali sme však novú rovnicu

$$\begin{aligned}(x_1 - 2) + (x_2 - 2) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) &= 6\\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 6\end{aligned}$$

Podľa tvrdenia 3.2.1 je takýchto štvoríc presne $\binom{9}{3}$.

Tou istou úvahou dostaneme z tvrdenia 3.2.1:

{celocries:DOSPOCET}

Dôsledok 3.2.4. *Pre dané $k, n \in \mathbb{N}_0$ je počet riešení rovnice*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

takých, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 1$ rovný presne

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Môžeme sa pozrieť aj na iné odvodenie dôsledku 3.2.4. (Ktoré nevyužíva predchádzajúce tvrdenie; takže by sme mohli postupovať aj obrátene – najprv dokázať nasledujúcim spôsobom tento výsledok a z neho ako dôsledok dostať 3.2.1.)

Dôkaz. Pre ľubovoľnú k-ticu $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ vyhovujúcu daným podmienkam si označme $y_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j$ pre $j = 1, 2, \ldots, k-1$. (Ak by sme analogicky definovali aj y_k, tak dostaneme $y_k = n$.)

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1\\ y_2 &= x_1 + x_2\\ y_3 &= x_1 + x_2 + x_3\\ &\vdots\\ y_{k-1} &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{k-1}\end{aligned}$$

Všimnime si, že každá voľba $x_1, \ldots, x_k$ nám dáva $k-1$ prvkov takých, že $1 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_{k-1} < n$, a teda určuje nejakú $(k-1)$-prvkovú podmnožinu

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Aj obrátene, každú $(k-1)$-prvkovú podmnožinu $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vieme práve jedným spôsobom usporiadať vzostupne.

$$A = \{y_1 < y_2 < \cdots < y_{k-1}\}.$$

Teda každá takáto podmnožina jednoznačne určuje rastúcu postupnosť čísel $y_1, y_2, \dots, y_k$. Potom $x_1, x_2, \dots, x_k$ vyhovujúce vyššie uvedeným vzťahom sú jednoznačne určené ako

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 - y_1 \\ x_3 &= y_3 - y_2 \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= y_{k-1} - y_{k-2} \\ x_k &= n - y_{k-1} \end{aligned}$$

Alebo stručnejšie: $x_i = y_i - y_{i-1}$, ak dodefinujeme $y_0 = 0$ a $y_k = n$.

Teda máme jednoznačné priradenie medzi riešeniami uvedenej rovnice v kladných celých číslach a $(k-1)$-prvkovými podmnožinami množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$. $\square$

Neskôr sa vrátime k tomu istému typu úlohy, keď nám navyše pribudnú okrem dolných ohraničení aj horné ohraničenia.

Už sme používali na odvodenie rôznych identít pre binomické koeficienty fakt, že vyjadrujú počet k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny. Ak máme iné interpretácie pre $\binom{n}{k}$ – ako napríklad počet celočíselných riešení alebo počet výberov s opakovaním, tak môžeme použiť aj tie.

Môžeme sa zamyslieť nad tým, čo sa stane, ak rozdelíme nezáporné celočíselné riešenia

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

podľa hodnoty x_k.

Je jasné, že x_k môže nadobúdať iba hodnoty od 0 po n. Ak si zafixujeme konkrétnu hodnotu $x_k = j$, tak riešenie môžeme doplniť toľkými spôsobmi, koľko máme (pri daných obmedzenia) riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} = n - j.$$

Ak vyjadríme počty riešení na základe tvrdenia 3.2.1, tak dostaneme:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+k-2-j}{k-2},$$

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{i=k-2}^{n+k-2} \binom{i}{k-2},$$

čo pri substitúcii $l = k-2$ a $m = n+k-2$ dáva

$$\binom{m+l+1}{l+1} = \sum_{i=l}^{m} \binom{i}{l}.$$

Vidíme, že sme dostali iné odvodenie hokejkovej identity (2.4).

Mohli by sme postupovať aj obrátene – ak sme už hokejkovú identitu odvodili iným spôsobom, mohli by sme ju použiť na induktívny dôkaz tvrdenia 3.2.1 (úloha 3.2.1). Aj keď dôkaz, ktorý sme uviedli vyššie – na základe toho, že ide vlastne o počet kombinácií s opakovaním – je určite jasnejší a priamočiarejší.

Cvičenia

:ULOZHOKEJKY}

Úloha 3.2.1. Dokážte tvrdenie 3.2.1 matematickou indukciou pomocou hokejkovej identity (2.4)

Úloha 3.2.2. Koľko je celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 31$ takých, že $x_i \geq i$ pre $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Úloha 3.2.3. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12$ takých, že $x_i \in \mathbb{N}_0$? (Hint: Môže pomôcť zamyslieť sa nad paritou čísel x_3 a x_4.)

{ULOVYBERNESUSEDNE}

Úloha 3.2.4. Ukážte, že počet možností ako vybrať k-prvkovú podmnožinu z $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že nebude obsahovať susedné čísla, je práve $\binom{n-k+1}{k}$. (Hint 1: Chceme vlastne čísla $a_1, \ldots, a_k$ také, že $a_1 < a_2 - 1$, $a_2 < a_3 - 1$, atď. Hint 2: Dá sa úloha previesť nejako vhodne na počítanie riešení $x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n$ s nejakými vhodnými obmedzeniami? Hint 3: Ak máte nápad na nejaké celkom iné riešenie, nedajte sa pomýliť možnosťami naznačenými v predošlých dvoch hintoch.)

Kapitola 4

Binomické koeficienty

4.1 Definícia binomického koeficientu

{defbinom:SEC} {defbinom:DEF}

Definícia 4.1.1. Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$ definujme *binomický koeficient* $\binom{n}{k}$ ako počet všetkých k-prvkových podmnožín množiny n.

Pre binomické koeficienty sa bežne používa aj názov *kombinačné číslo*.

Môžeme si všimnúť, že pre $k > n$ dostaneme $\binom{n}{k} = 0$. (Nemôžeme mať podmnožinu n-prvkovej množiny, ktorá má viac než n prvkov.)

Takisto pre $k < 0$ máme $\binom{n}{k} = 0$; tento prípad sme v definícii pripustili hlavne preto, že nám to zjednoduší formulácie niektorých tvrdení a niektorých dôkazov.

Už sme ukázali v (2.1), že pre $0 \leq k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Resp. ak ten istý vzťah prepíšeme v tvare

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

tak v takejto podobe platí aj pre $k > n$. (Všimnime si, že v čitateli sa ako jeden z činiteľov vyskytne nula.)

{defbinom:POZNREALS}

Poznámka 4.1.2. Môžeme si všimnúť, že aj pre reálne číslo n by výraz $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. Aj keď by sme pravdepodobne použili iné označenie; keďže písmeno n obvykle používame pre premennú, ktorá nadobúda prirodzené alebo aspoň celočíselné hodnoty. T.j. pozerali by sme sa na polynóm

$$\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

Na tomto mieste sa takémuto zovšeobecneniu nebudeme venovať, stručne o ňom niečo povieme v časti 4.7.

Medzi základné vlastnosti patrí Pascalova identita (2.2), t.j.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Už sme videli, ako na základe tejto rovnosti môžeme rekurzívne z hodnôt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ v Pascalovom trojuholníku vyplniť ďalšie hodnoty.

Pomerne ľahko vieme overiť, že Pascalov trojuholník je symetricky (úloha 2.3.5):

fbinom:EQSYM}

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{4.1}$$

4.2 Binomická veta

Chceme sa pozrieť na to, ako vyzerá výraz $(1+t)^n$ pre rôzne hodnoty exponentu $n \in \mathbb{N}_0$. Roznásobením môžeme skontrolovať, ako to vyzerá pre niekoľko prvých hodnôt.

$$\begin{aligned}
(1+t)^0 &= 1\\
(1+t)^1 &= 1+t\\
(1+t)^2 &= 1+2t+t^2\\
(1+t)^3 &= 1+3t+3t^2+t^3\\
(1+t)^4 &= 1+4t+6t^2+4t^3+t^4\\
(1+t)^5 &= 1+5t+10t^2+10t^3+5t^4+t^5\\
(1+t)^6 &= 1+6t+15t^2+20t^3+15t^4+6t^5+t^6
\end{aligned}$$

Aj v prípade, že by sme sa binomickou vetou doteraz nestretli, na tomto mieste určite každý zbadá, že rovnaké čísla sme videli v Pascalovom trojuholníku.

O tom, že skutočne dostaneme také polynómy, ako sme vypísali vyššie, sa dá presvedčiť roznásobením.

{binvt:VTBINOM}

Veta 4.2.1 (Binomická veta)**.** *Pre ľubovoľné $t \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k. \tag{4.2}$$

{binvt:EQBIN1}

Pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{4.3}$$

{binvt:EQBIN2}

Evidentne (4.2) je špeciálny prípad (4.3). Ale aj obrátene, ak platí (4.2), tak po dosadení $t = \frac{y}{x}$ dostaneme

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{y^k}.$$

Ak obe strany vynásobíme y^n, tak už máme

$$(y+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Tento postup je legitímny pre $y \neq 0$. Ľahko však vidíme, že (4.3) platí aj v prípade $y = 0$.

Ak teda chceme dokázať vetu 4.2.1, stačí dokázať niektorú z dvoch rovností (4.2) a (4.3). Z ktorejkoľvek z nich už pomerne ľahko odvodíme tú druhú.

Môžeme sa na to pozrieť kombinatoricky.

Dôkaz. Pri roznásobovaní výrazu

$$(1+t)^n = \underbrace{(1+t)(1+t)\cdots(1+t)}_{n\text{-krát}}$$

z každej zátvorky vyberieme 1 alebo t.

Ak chceme dostať t^k, tak musíme práve z k zátvoriek vybrať premennú t a z ostatných jednotku. Máme práve $\binom{n}{k}$ možností, ako vybrať týchto k zátvoriek. □

Ak by sa vám predošlý argument zdal príliš neformálny, tak to isté vieme dokázať aj indukciou vzhľadom na n.

Dôkaz. 1° Ľahko skontrolujeme, že tvrdenie binomickej vety platí pre $n = 0$, $n = 1$.

2° Úpravou výrazu $(1+t)^{n+1}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
(1+t)^{n+1} &= (1+t)(1+t)^n \\
&= (1+t)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k + t\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}t^k \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}t^k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)t^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}t^k
\end{aligned}$$

V rovnosti označenej ako $(*)$ sme pridali dva nulové členy obsahujúce $\binom{n}{n+1}$ a $\binom{n}{-1}$. □

Poznámka 4.2.2. Pri súvise umocňovania a počtu zobrazení medzi dvoma množinami sme spomenuli rovnosť $0^0 = 1$; pozri poznámku 2.1.9. Práve binomická veta je príkladom situácie, kedy sa nám takéto niečo hodí. Pozrime sa na binomickú vetu v tvare

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k$$

pre prípad $t = 0$. V takomto na pravej strane je sčítanec pre $k = 0$ rovný $\binom{n}{0}0^0 = 1 \cdot 1 = 0$ a všetky ostatné sčítance sú nulové (keďže $0^k = 0$ pre $k > 1$). Teda naozaj dostávame rovnosť $1 = 1$ a binomická veta funguje aj v takomto prípade. (Podobne si môžete rozmyslieť, čo sa stane s rozvojom $(x+y)^n$ v prípade, že $y = 0$.)

Ak by sme chceli byť opatrní a povedali by sme si, že hodnotu 0^0 radšej nedefinujeme; tak pri formulácii a aj pri používaní binomickej vety by sme si museli dávať pozor na nulový prípad.

Poznámka 4.2.3. Keď sme dokázali binomickú vetu pre komplexné čísla, je azda vcelku prirodzená otázka, či analogická veta platí aj v iných situáciách – napríklad pre matice, polia, okruhy. Na tomto mieste necháme iba kryptickú poznámku, že odpoveď na niektoré z týchto otázok môže byť nie, na niektoré áno za vhodných dodatočných podmienok (a správnej interpretácie binomickej vety). A necháme na zvedavého čitateľa, aby sa nad takýmito vecami zamyslel samostatne. (Pričom je veľmi pravdepodobné, že s binomickou vetou ste sa už stretli aspoň pre niektoré z týchto situácií.) Pozri úlohy 4.2.1, 4.2.2 a 4.2.3.

Binomická veta je užitočná a zaujímavá sama o sebe. Ale vieme ju použiť aj na dôkaz niektorých identít týkajúcich sa binomických koeficientov.

Napríklad ak do (4.2) dosadíme $t = 1$, tak dostaneme

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Toto je presne vzťah pre súčet binomických koeficientov v riadku Pascalovho trojuholníka, ktorý sme už predtým odvodili vo vete 2.3.1.

Čo sa stane, ak do binomickej vety dosadíme $t = -1$.

{binvt:DOSPARNE}

Dôsledok 4.2.4. *Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ také, že $n \geq 1$*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

A teda platia aj rovnosti

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1}.$$

Zistili sme teda, že počet podmnožín n-prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je rovnaký, ako počet podmnožín s nepárnym počtom prvkov. Takto sformulované to znie ako výrok o počítaní množín – takže sa zdá byť prirodzené pýtať sa na to, či by sme nevedeli vymyslieť aj nejaký kombinatorický argument prečo sa tieto počty rovnajú (úloha 4.2.4).

Poznamenajme, že sumy uvedené v dôsledku 4.2.4 by sme mohli zapísať aj ako

$$\sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} = \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1}.$$

Alebo vďaka našej konvencii, že $\binom{n}{k} = 0$ pre $k = n$, by sme sa vlastne nemuseli starať o hranice sumy a zapísať ich ako

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{2j} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1},$$

pričom tento zápis síce formálne vyzerá ako nekonečný súčet, od istého miesta však už máme iba nuly, a teda v skutočnosti sčitujeme iba konečne veľa členov.

Odvodenie pre súčet párnych členov môžeme naznačiť aj takto:

$$\begin{array}{rl}
(1+1)^n = & \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2k} + \binom{n}{2k+1} + \ldots \\
(1-1)^n = & \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2k} - \binom{n}{2k+1} + \ldots \\
\hline
2^n = & 2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + \cdots + 2\binom{n}{2k} + \ldots
\end{array}$$

Vedeli sme teda dostať súčet všetky čísel na párnych pozíciach v riadku Pascalovho trojuholníka. Dali by sa nejako aspoň trochu rozumne vyjadriť aj súčty, kde vezmeme každý tretí alebo každý štvrtý binomický koeficient?

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{3k} = ?$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{4k} = ?$$

Môžete sa skúsiť nad týmito otázkami zamyslieť – v úlohách 4.2.5, 4.2.6 nájdete nejakú možnosť, ako sa dajú vyjadriť pravé strany a súčasne aj návod na odvodenie. (Aj keď nejaký dosť silný hint nám dáva už to, v akej kapitole sa táto otázka vyskytla a akým spôsobom sme vedeli odvodiť súčet pre párne členy.)

S funkciou $f(t) = (1+t)^n$ môžeme robiť aj iné operácie.

$$f'(t) = n(1+t)^{n-1}$$

Súčasne vieme zderivovať aj jednotlivé sčítance v sume $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k$ a dostaneme

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}t^{k-1}.$$

Ak dosadíme do $f'(t)$ hodnotu $t = 1$, tak dostávame

{binvt:EQSUMKBINOMNK}

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}. \tag{4.4}$$

Aj pri tejto sume sa môžeme pozrieť na to, či ju vieme odvodiť iným spôsobom. (Napríklad kombinatoricky alebo použitím iných identít, ktoré poznáme pre binomické koeficienty.) Nejaké možné prístupy k odvodeniu tejto identity sú naznačené v úlohách 4.2.7 a 4.4.1.

Samozrejme, mohli by sme tento postup opakovať – skúsiť čo dostaneme pre druhú deriváciu, tretiu deriváciu a podobne. Niektoré úlohy, kde sa takéto veci dajú použiť, nájdete v cvičeniach či už za touto časťou alebo medzi cvičeniami v časti 4.4 venovanej sumám s binomickými koeficientami.

Môžeme skúsiť ten istý vzťah aj zintegrovať.

$$f(t) = (1+t)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k$$
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Samozrejme, aj tu by sme mohli takýto postup opakovať viackrát. Ako obvykle, aj tu sa môžeme pýtať na to, či vieme odvodiť ten istý vzťah aj inými spôsobmi (matematickou indukciou, kombinatoricky, použitím iných identít). Jeden možný postup je naznačený v úlohe 4.4.5.

Vyskúšali sme do identity z binomickej vety dosadzovať rôzne hodnoty, zderivovať alebo zintegrovať ju. Samozrejme, môžeme s funkciou $f(t) = (1+t)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k$ robiť aj rôzne iné veci. Niektoré sa vyskytnú ako cvičenia, spomeňme na tomto mieste napríklad aj dôkaz identity (4.8).

Cvičenia

vi:ULOMATICE}

Úloha 4.2.1. Nech A, B sú štvorcové matice rovnakej veľkosti a nad tým istým poľom.
a) Platí pre matice binomická veta v tvare

$$(I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k,$$

pričom (ako obvykle) berieme $B^0 = I$?
b) Platí pre matice aj takáto podoba binomickej vety?

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

c) Vedeli by ste prísť aspoň na nejaké postačujúce podmienky, kedy pre matice funguje binomická veta?

{binvtcvi:ULOPOLE}

Úloha 4.2.2. Nech F je pole a $a, b \in F$. Pre $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in F$ interpretujeme $n \times a$ prirodzeným spôsobom ako

$$n \times a = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n\text{-krát}}.$$

Dokážte, že potom platí binomická veta v takomto tvare:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}.$$

{binvtcvi:ULOOKRUH}

Úloha 4.2.3. Nech R je okruh a $a, b \in R$. Platí v takejto situácii binomická veta v takejto podobe? Ak nie platí aspoň pre prípad, že $ab = ba$? (T.j. napríklad v komutatívnych okruhoch. Alebo aj v nekomutatívnom okruhu, ak a a b sú nejaké prvky, ktoré komutujú.)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times a^k b^{n-k}$$

{binvtcvi:ULOPARNE}

Úloha 4.2.4. Vedeli by ste kombinatorickou úvahou zdôvodniť, že počet podmnožín n-prvkovej množiny, ktoré majú párny počet prvkov, je taký istý, ako počet podmnožín s nepárnym počtom prvkov? Viete napríklad dostať nejakú bijekciu medzi množinou všetkých párnych podmnožín a množinou všetkých nepárnych podmnožín?

{binvtcvi:ULOSUM4K}

Úloha 4.2.5. Čo sa stane, ak do binomickej vety dosadíme $t = \pm i$? Vedeli by ste na základe toho odvodiť identitu, ak sčitujeme v riadku Pascalovho trojuholníka každý štvrtý binomický koeficient?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{4k} = \frac{2^n + (1+i)^n + (1-i)^n}{4} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}}{2}$$

{binvtcvi:ULOSUM3K}

Úloha 4.2.6. Označme $\omega = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = e^{2\pi i/3}$, t.j. komplexné riešenie rovnice $x^3 = 1$. Ukážte, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k} = \frac{2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n}{3} = \frac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$$

{ULOSUMKBINOM

Úloha 4.2.7. Vedeli by ste fakt, že výrazy

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{n-k}$$

predstavujú tú istú sumu použiť na odvodenie rovnosti $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$?

{ULOSUMKBINOMNKPRIEMER}

Úloha 4.2.8. Rovnosť z predošlej úlohy sa dá ekvivalentne prepísať ako

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{n}{2}$$

a v takejto podobe ju môžeme intepretovať ako: Priemerná veľkosť podmnožiny $\{1,2,\dots,n\}$ je $\frac{n}{2}$. Dá sa aj takýto pohľad použiť na dôkaz tejto rovnosti? (Aj keď sa dá povedať, že to je skoro veľmi podobné na argument naznačený v predošlej úlohe.)

Úloha 4.2.9. [L2, 5.1.2], [L1, 5.1.2]: Zistite čomu sa rovná $\sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}$ (a nájdite nejaké zdôvodnenie).

4.3 Vlastnosti binomických koeficientov

{vlastnosti:SECT}

Skúsme sa pozrieť na niektoré jednoduché vlastnosti binomických koeficientov.

Napríklad pomerne ľahko by sme mali byť schopní zdôvodniť, že pre $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$ platí

{vlastnosti:EQFRACBINOM}

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}. \tag{4.5}$$

Pre nenulové k túto rovnosť môžeme túto rovnosť ekvivalentne prepísať aj takto:

vlastnosti:EQFRACBINOM2}

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \tag{4.6}$$

Zdôvodnenie týchto rovností by malo byť pomerne jednoduché – mohli by sme napríklad na oboch stranách zobrať vyjadrenie pomocou faktoriálov a trochu upravovať. Poďme sa pozrieť na nejaký kombinatorický argument.

Dôkaz rovnosti (4.5). Predpokladajme, že máme n ľudí, z ktorých chceme vybrať k-člennú komisiu a súčasne v tejto komisii chceme vybrať predsedu. (Všetci ostatní členovia komisie sú úplne rovnocenní.) Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?

Jeden možný pohľad je ten, že vybrali k členov komisie, na to máme $\binom{n}{k}$ možností. A potom sme vybrali predsedu, ktorý musí byť jedným z členov komisie. Teda tu máme práve k možností. Celkovo dostávame $k\binom{n}{k}$ spôsobov ako vybrať komisiu aj s predsedom.

Môžeme počítať aj inak: Najprv vyberieme predsedu, na to máme n možností. Potom ešte treba vybrať ostatných $k-1$ členov komisie, tých už vyberáme spomedzi zvyšných $n-1$ ľudí, ktorých máme k dispozícii. Teda dostaneme, že máme $n\binom{n-1}{k-1}$ rôznych výberov.

Pretože obe čísla vyjadrujú počet prvkov tej istej množiny, musia sa rovnať:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

□

Rovnosť (4.5) môžeme zovšeobecniť na nasledujúcu identitu:

:EQBINOMNKKL}
$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}. \tag{4.7}$$

Dôkaz ponecháme ako cvičenie (úloha 4.3.4).

Poznámka 4.3.1. Samozrejme, tú istú vec by sme vedeli vyjadriť aj veľa inými spôsobmi; nie iba cez výber komisie.

Mohli by sme si napríklad zobrať nejakú n-prvkovú množinu M a počítať koľko je prvkov množine

$$\{(x, A); x \in A, A \subseteq M, |A| = k\}.$$

Alebo ak by sme chceli niečo, čo sa viac podobá na príklad z reálneho života a ľahšie sa predstavuje, tak by sme mohli vyberať skoro hocijaké objekty – v tejto konkrétnej úlohe ešte potrebujeme, aby jeden z nich mal špecifickú úlohu. (Vytiahneme si k kariet z balíčka a ešte potom vyberieme jednu, ktorá bude na toto kolo tromfom. Spomedzi nejakých receptov vyberáme k jedál, ktoré sa budú dnes v našej reštaurácii ponúkať; pričom jedno z nich bude ako extra menu. Z ponuky rôznych tém vyberieme k prednášok, ktoré budú ponúkané na dni otvorených dverí; a ešte vyberieme jednu, ktorá bude vo veľkej posluchárni pre všetkých účastníkov. Dá sa vymyslieť veľa ďalších situácií, ktoré by sa dali použiť – fantázii sa medze nekladú.)

Keďže sa takým spôsobom dajú interpretovať viaceré kombinatorické identity, tak sa počítanie komisií v kombinatorike dosť často vyskytuje. (Určite na to narazíte, ak otvoríte nejaké knihy venované podobným téma alebo jednoducho skúsite na internete vyhľadávať nejakú kľúčové slová súvisiace s binomickými koeficientami a skúsite pridať aj komisie.) Takže aj tu sme použili takúto interpretáciu – a ešte sa s ňou stretneme aj inde.

V Pascalovom trojuholníku môžeme ľahko vypozorovať, že jeho prvky najprv rastú a potom klesajú, t.j. pre celé čísla také, že $0 \le k \le n$ platí:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &< \binom{n}{k+1} &\qquad& \text{ak } 2k+1 < n \\ \binom{n}{k} &> \binom{n}{k+1} && \text{ak } 2k+1 > n \end{aligned}$$

Pokúste sa nájsť nejaký dôkaz, že tieto nerovnosti skutočne platia – úloha 4.3.1.

V závislosti od parity teda ako najväčší prvok v riadku Pascalovho trojuholníka máme prvok, ktorý je v strede, t.j. binomický koeficient tvaru $\binom{2n}{n}$; alebo sú v streda dva rovnaké prvky $\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$.

Cvičenia

{vlastnosticvic:ULONEROV

Úloha 4.3.1. Nech $n \in \mathbb{N}_0$. Zistite, pre ktoré $k \in \mathbb{Z}$ platí nerovnosť $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ a pre ktoré k platí obrátená nerovnosť.

{vlastnosticvic:ULONEROV

Úloha 4.3.2. Ukážte. že pre $n, k \in \mathbb{Z}$ také, že $0 \le k \le n$ platí $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$. Dá sa táto rovnosť použiť na riešenie úlohy 4.3.1?

Úloha 4.3.3. Ukážte, že pre $n, k \in \mathbb{Z}$ také, že $0 \le k \le n$ platí $\binom{n+1}{k} > \binom{n}{k}$.

{vlastnosticvic:ULOBINOM

Úloha 4.3.4. Dokážte, že pre $n, k, l \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}.$$

Úloha 4.3.5. [BQ, Identity 154] Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}.$$

(Pokúste sa nájsť aj kombinatorický argument, nie iba zdôvodnenie pomocou výpočtu.)

Úloha 4.3.6. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí $2\binom{n}{2} + n^2 = \binom{2n}{2}$.

Dalo by sa nájsť nejaké zovšeobecnenie tejto rovnosti, ktoré dáva vyjadrenie pre $\binom{n+k}{2}$?

{ULOSUM1331}

Úloha 4.3.7. Vedeli by ste nejako zjednodušiť výraz $\binom{n}{k} + 3\binom{n}{k-1} + 3\binom{n}{k-2} + \binom{n}{k-3}$?

4.4 Sumy s binomickými koeficientami

{vlastnosti:SECTSUM}

4.4.1 Vandermondova identita

Tvrdenie 4.4.1. *Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí*

{binom:EQVANDERMONDE}

$$\sum_{j=0}^{s} \binom{m}{j}\binom{n}{s-j} = \binom{m+n}{s}. \tag{4.8}$$

Dôkaz. TODO Máme m ľudí z matematickej sekcie a n ľudí z informatickej sekcie; počítame koľkými spôsobmi môžeme zostaviť komisiu, ktorá má s členov. □

Dôkaz. TODO

$$(1+t)^{m+n} = (1+t)^m(1+t)^n$$

$$\sum_{s=0}^{m+n} \binom{m+n}{s} t^s = \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{m} t^j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k\right)$$

□

4.4.2 Niektoré ďalšie sumy

Cvičenia

{ULOSUMKBINOMNKKOMB}

Úloha 4.4.1. Vedeli by ste nájsť nejakú kombinatorickú interpretáciu, ktorou sa dá odvodiť nasledujúca rovnosť? Alebo by ste ju vedeli s použitím niektorej identity z tejto časti previesť na inú známu sumu?

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

{ULOSUMKBINOMNKPARNE}

Úloha 4.4.2. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ je párne}}} k\binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ je nepárne}}} k\binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

umcvic:ULOSUMK^2BINOMNK}

Úloha 4.4.3. Dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

c:ULOSUMDER2}

Úloha 4.4.4. Dokážte rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

{binomsumcvic:ULOSUMFRAC

Úloha 4.4.5. Dá sa výraz $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ upraviť nejakým spôsobom, ktorý by nám pomohol pri vyjadrení sumy $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$?

{binomsumcvic:ULOSUMSTVO

Úloha 4.4.6. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Úloha 4.4.7. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Úloha 4.4.8. [BQ, Identity 155] Nech $n, m \in \mathbb{N}_0$ a $0 \le m \le n$. Dokážte, že

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}2^{n-m}.$$

Úloha 4.4.9. [BQ, Identity 158] Nech $n, m \in \mathbb{N}_0$ a $0 \le m \le n$. Dokážte, že

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}.$$

4.5 Prechádzky po mriežke

{mriezka:SECT}

Poďme sa pozrieť ešte na jeden problém, ktorý možno vyjadriť pomocou binomických koeficientov.

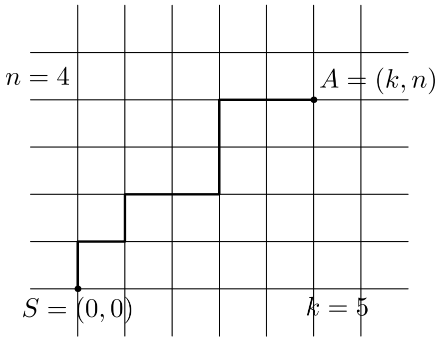
Predpokladajme, že máme štvorcovú mriežku (alebo inak, že sa pozeráme na body v rovine s celočíselými súradnicami). Chceme sa dostať z bodu $(0, 0)$ do bodu (k, n) pričom v každom kroku máme povolené ísť buď doprava alebo nahor (na východ alebo na sever). Inak to môžeme sformulovať tak, že sa môžeme pohybovať iba po hranách mriežky a chceme ísť čo najkratšou cestou. Príklad povolenej cesty je na obrázku 4.1. Vedeli by sme spočítať koľko existuje takýchto ciest?

Tvrdenie 4.5.1. *Počet ciest po mriežke z bodu $(0, 0)$ do (k, n) takých, že v každom kroku sa posunieme doprava alebo nahor (t.j. každý krok je tvaru $(i, j) \to (i + 1, j)$ alebo $(i, j) \to (i, j + 1)$) je rovný*

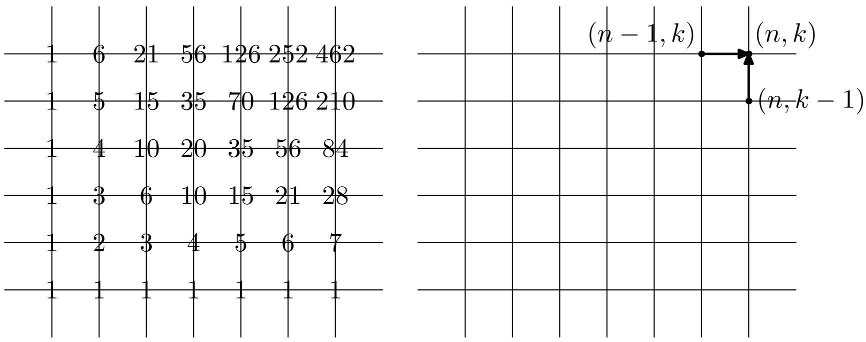
$$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$$

Dôkaz. TODO Cesta má $n + k$ krokov, pričom máme vybrať k pozícií, na ktoré dáme $\to$ (a na ostatných n pozíciach bude $\uparrow$) □

TODO aj z obrázku (resp. indukciou) – obrázok 4.2



Obr. 4.1: Príklad cesty v mriežke {mriezka:FIGP



Obr. 4.2: Súvis mriežky a Pascalovho trojuholníka {mriezka:FIGP

4.6 Nerovnosti a asymptotické vlastnosti

4.6.1 Faktoriál

Stirlingova formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{4.9}$$ {nerov:EQSTIR

Symbol $\sim$ používame v takom význame ako ste zvyknutý z analýzy. T.j. pre postupnosti aj pre funkcie to hovorí o tom, že podiel sa limitne blíži k jednotke.

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Teda uvedené tvrdenie vlastne hovorí, že:

{nerov:EQSTIRLINGLIM}
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1. \tag{4.10}$$

Toto tvrdenie na tomto mieste uvádzame bez dôkazu – je ho však rozumné spomenúť, pretože je to veľmi známy výsledok o faktoriáloch.

4.7 Binomická veta s reálnym exponentom

realexp:SECT}

Pri vyjadrení binomického koeficientu sme dostali výraz

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Výraz na pravej strane rovnosti by mal význam aj pokiaľ n je reálne alebo dokonca komplexné číslo. (Takéto niečo sme už spomenuli v poznámke 4.1.2.) Aspoň nejaké veci si o takomto zovšeobecnení povieme, tak zadefinujme všeobecne:

{realexp:DEFBINOM}

Definícia 4.7.1. Pre $t \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ označme

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}$$

V tejto definícii kladieme $\binom{t}{0} = 1$; v súlade s obvyklou konvenciou o prázdnom súčine.

Pomerne prirodzene sa človek môže pýtať otázky:

- Je aj takéto zovšeobecnenie binomických koeficientov na niečo užitočné?
- Budú splnené niektoré vlastnosti, ktoré sme dokázali pre *obvyklú* definíciu binomických koeficientov?
- Ak sa pozeráme na tento výraz ako na funkciu od t, bude mať takýto polynóm niektoré zaujímavé vlastnosti?

Ku všetkým z týchto otázok by sa dalo povedať pár vecí – niektoré z nich azda aj aspoň trochu zaujímavé. My chceme na tomto mieste spomenúť hlavne to, že binomickú vetu vieme zovšeobecniť aj na prípad, kedy je exponent kladné reálne číslo t.

{realexp:VTBINOM}

Veta 4.7.2. *Nech $t \in \mathbb{R}$. Nech $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Potom platí rovnosť*

$$(1+x)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} x^k. \tag{4.11}$$ {realexp:EQSERIES}

(T.j. rad na pravej strany hodnosti konverguje k hodnote uvedenej na ľavej strane.)

Je užitočné si uvedomiť aj to, že všetky mocniny vystupujúce v uvedenom vzťahu sú také, že základ je kladné reálne číslo – teda nemáme žiadne problémy s tým, či je takáto mocnina naozaj definovaná.

Rovnosť (4.11) môžeme prepísať aj takto:

$$(1+x)^t = 1 + tx + \frac{t(t-1)}{2!}x^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-k+1)}{k!}x^k + \ldots \tag{4.12}$$ {realexp:EQSERIES2}

Ak poznáme z matematickej analýzy výsledky o Taylorových radoch, tak vlastne celé zdôvodnenie vety 4.7.2 sa dá povedať stručne ako: Vieme nájsť Taylorov rad funkcie $f(x) = x^t$ v bode $a = 1$ resp. Taylorov rad funkcie $f(x) = (1+x)^t$ v bode $a = 0$? Aký bude mať tento rad polomer konvergencie?

Dôkaz. Pre funkciu $f(x) = (1+x)^t$ dostaneme ako jej k-tú deriváciu

$$f^{(k)}(x) = t(t-1)\cdots(t-k+1)x^{t-k}.$$

Teda Taylorov rad v bode $a = 0$ má tvar

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)(0)}}{k!}x^k + \dots \\ (1+x)^t &= 1 + tx + \frac{t(t-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{t}{k}x^k + \dots \\ (1+x)^t &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{t}{k}x^k \end{aligned}$$

T.j. dostali sme presne tvar uvedený v rovnosti (4.11).

Máme vyjadrenie v tvare mocninového radu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Skúsme vyjadriť jeho polomer konvergencie. Pre $a_k = \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-k+1)}{k!}$ máme

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{t-k}{k+1}\right| = 1.$$

Teda uvedený rad určite konverguje pre $|x| < 1$. □

Môžeme si na tomto mieste všimnúť ako jednu z vecí, čo dostaneme pri takejto zovšeobecnenej definícii binomického koeficientu pre záporné čísla. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}_0$. Potom platí

{realexp:EQNEG}

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}. \tag{4.13}$$

Stačí si upraviť oba uvedené binomické koeficienty.

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+2)(-n-k+1)}{k!} \\ \binom{n+k-1}{k} &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!} \end{aligned}$$

A všimnúť si to, že v oboch čitateľoch sa vyskytuje súčin čísel, ktoré sa líšia iba poradím a znamienkom.

{realexp:PRIKLGEOM}

Príklad 4.7.3. Môžeme si napríklad všimnúť, že pre $n = -1$ z (4.13) dostaneme

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k,$$

a teda v tomto prípade nám (4.11) dáva známe vyjadrenia pre geometrický rad.

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \\ (1-x)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \end{aligned}$$

Inak povedané, máme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \end{aligned}$$

Oba rady konvergujú pre $|x| < 1$.

Pozrime sa ešte na vyjadrenie pre $(1-x)^{-n}$; sčasti preto, že sa nám môže občas hodiť a sčasti preto, že to súvisí s vecami, o ktorých sme už hovorili.

:PRIKLMINUSN}

Príklad 4.7.4. Opäť vlastne iba použijeme (4.11), teraz pre $t = -n$. Po použití rovnosti $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$, ktorú sme odvodili v (4.13), dostaneme

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k.$$

Trochu iný pohľad na ten istý problém – vlastne počítame takéto niečo:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+x^3+\dots)^n.$$

Koľkými spôsobmi môžeme na pravej strane dostať exponent x^k? Máme n zátvoriek, teda vlastne chceme z každej vybrať nejaké x^{a_i} tak, aby súčet exponentov bol práve k. T.j. chceme, aby platilo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = k.$$

Podľa vety 3.2.1 máme práve $\binom{n+k-1}{k}$ možností na výber takejto celočíselnej n-tice $(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Nechajme teraz bokom otázku, či sme si naozaj mohli dovoliť roznásobovať uvedené rady člen po člene. (Na matematickej analýze uvidíte, že takéto niečo funguje bez problémov ak máme absolútne konvergentné rady. Hoci v tomto prípade – keďže používame geometrický rad – by sme to azda boli schopní zdôvodniť aj nejako jednoduchšie, priamo z definície.)

4.8 Multinomická veta

Z binomickej vety vieme ako vyjadriť koeficienty v rozvoji výrazu tvaru $(x_1 + x_2)^n$. Azda je do istej miery prirodzené pýtať sa aj na výrazy ako $(x_1 + x_2 + x_3)^n$ resp. všeobecnejšie $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$.

Pri roznásobovaní výrazu

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_k)(x_1+x_2+\dots+x_k)\cdots(x_1+x_2+\dots+x_k)}_{n\text{-krát}}$$

vyberieme z každej zátvorky niektorý z členov $x_1, x_2, \dots, x_k$. Dostaneme teda súčiny n takýchto členov, t.j. vlastne výrazy v tvare $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$, kde súčet exponentov je práve n.

Koľkými spôsobmi môžeme dostať $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$? Inak povedané máme vybrať a_1 zátvoriek pre x_1, a_2 zátvoriek pre x_2, atď. Pri tomto výbere záleží na poradí. Teda toto je typ úlohy, aký sme už počítali – vlastne počítame permutácie s opakovaním. Vieme, že ich počet vyjadruje multinomický koeficient (3.1):

$$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_k!}$$

Dostali sme takéto zovšeobecnenie binomickej vety:

{multinom:VTMULT}

Veta 4.8.1 (Multinomická veta)**.** *Pre ľubovoľné $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ platí rovnosť*

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \sum_{\substack{a_1+\dots+a_k=n\\ a_i\geq 0}}\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_k}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k} \tag{4.14}$$ {multinom:EQMULT}

Kapitola 5

Princíp zapojenia a vypojenia

V tejto kapitole sa budeme zaoberať *princípom zapojenia a vypojenia*, niekedy sa používa aj názov *princíp inklúzie a exklúzie*.[1]

Je to spôsob, ktorým môžeme vypočítať počet prvkov zjednotenia konečne veľa množín. Ukážeme si aj viaceré aplikácie tohto princípu.

5.1 Formulácia a dôkaz princípu zapojenia a vypojenia

Pre disjunktné konečné množiny sme používali fakt, že $|A \cup B| = |A| + |B|$. Vieme vyjadriť počet prvkov množiny $A \cap B$ aj ak tieto množiny nie sú disjunktné? Nie je ťažké si uvedomiť, že v súčte $|A| + |B|$ sú prvky z prieniku dvakrát, teda ich stačí odpočítať a dostaneme

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Niekedy sa môže hodiť prepísať tento vzťah ako výsledok, ktorý počíta počet prvkov doplnku zjednotenia. Ak $A, B \subseteq X$ pre nejakú konečnú množinu X, tak máme

$$|X \setminus (A \cup B)| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Podobnú úvahu zvládneme urobiť aj pre tri množiny.

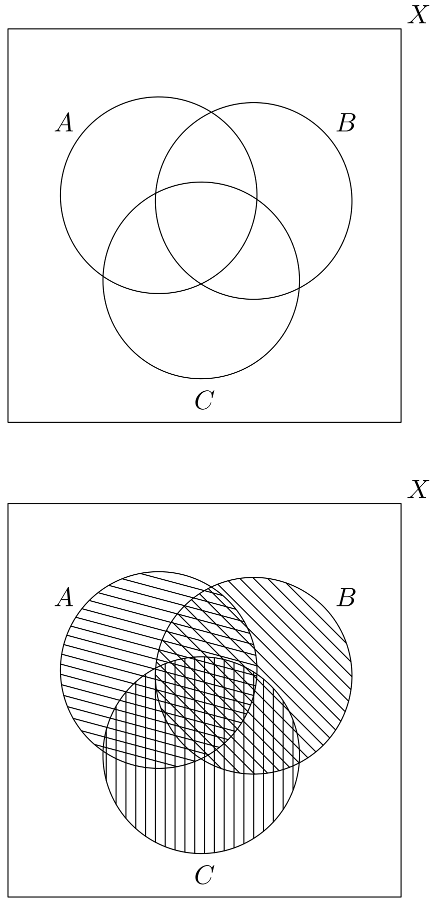
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$|X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Na základe toho už vieme uhádnuť, ako to bude fungovať pre viac množín. Pri výpočte $|\bigcup_{i=1}^n A_i|$, sčítame počty prvkov jednotlivých množín, potom odčítame počty prienikov všetkých dvojíc, pripočítame prieniky všetkých trojíc spomedzi našich množín, atď.

Dostávame takto nasledujúci výsledok, ktorý sa zvykne nazývať *princíp zapojenia a vypojenia* alebo *princíp inklúzie a exklúzie*.

{pie:VTPIE}

[1] V angličtine: inclusion—exclusion principle.



e:FIGPIESRAF} Obr. 5.1: Prvky, ktoré sme započítali viackrát

Veta 5.1.1 (Princíp zapojenia a vypojenia)**.** *Nech $A_1, \dots, A_n$ sú konečné množiny a všetky z nich sú podmnožinami konečnej množiny X. Potom pre počet prvkov ich zjednotenia platí:*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \tag{5.1}$$

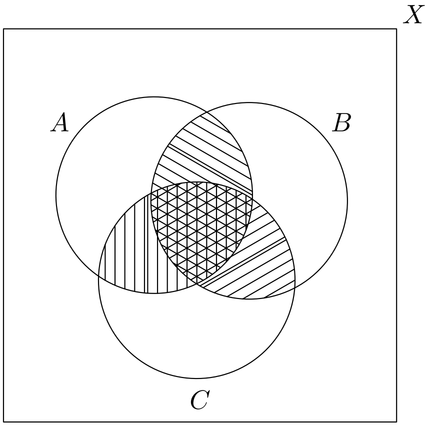
{pie:EQPIE}

Ekvivalentne:

$$\left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \right| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \tag{5.2}$$

{pie:EQPIE2}

Iná možnosť ako zapísať princíp zapojenia a vypojenia je prienik $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$



{pie:FIGPIESRAF2} Obr. 5.2: Koľkokrát sme odpočítali jednotlivé prvky

zapísať stručnejšie ako $\bigcap\limits_{i \in I}$. Pričom takéto výrazy sa tu vyskytnú pre všetky podmnožiny $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a znamienko bude závisieť od veľkosti množiny I.

{pie:EQPIESUBSETS}
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \tag{5.3}$$

Poďme sa pozrieť na to, ako by sme vedeli zdôvodniť platnosť vety 5.1.1.

Dôkaz. Chceme zdôvodniť rovnosť

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I|=k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Označme si $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

Na ľavej strane máme počet prvkov množiny M, na ktorý sa dá pozerať aj tak, že za každý prvok zo zjednotenia sme započítali jednotku.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |M| = \sum_{x \in M} 1.$$

Skúsme sa pozrieť podobným spôsobom na pravú stranu: Každý prvok $x \in M$ sa buď vyskytuje alebo nevyskytuje v $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$, teda k príslušnému sčítancu $\left|\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right|$ prispieva nulou alebo jednotkou.

Pozrime sa na prípad, keď x patrí práve do s množín z $A_1, \dots, A_n$. Pretože sa zaoberáme iba takými prvkami x, ktoré patria do nášho zjednotenia, určite máme $s \geq 1$.

Zafixujme si nejaké k z rozsahu $1, 2, \dots, n$ a pozrime sa na to, ku koľkým sčítancom tvaru $\left|\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right|$ prispeje takýto prvok jednotkou. Inak povedané, koľko sa dá vybrať k-prvkových podmnožín v $\{1, 2, \dots, n\}$ takých, že

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Takýchto možností je presne $\binom{s}{k}$. (Špeciálne ak $k > s$ tak dostaneme nulu.)

To znamená, že takýto prvok x prispel k pravej strane hodnotou

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \binom{s}{k} \\
&= -\sum_{k=1}^{s} (-1)^{k} \binom{s}{k} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{s} (-1)^{k} \binom{s}{k} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Pričom sme využili rovnosť $\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} = 0$. (Suma binomických koeficientov so striedavými znamienkami dáva nulu, to sme odvodili ako napríklad ako dôsledok binomickej vety v dôsledku 4.2.4. Oplatí sa upozorniť, že tu potrebujeme $s \geq 1$, pre $s = 0$ nám takáto suma dá jednotku.)

Vidíme teda, že príspevok každého prvku ku pravej strane je rovný jednej. □

Zhruba ten istý argument sa dá o čosi formálnejšie zapísať pomocou charakteristických funkcií.

Dôkaz. Označme si $M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Pre každú podmnožinu $A \subseteq M$ môžeme zobrať *charakteristickú funkciu* $\chi_A \colon M \to \{0, 1\}$ určenú predpisom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in A, \\ 0 & \text{ak } x \notin A. \end{cases}$$

Malo by byť jasné, že pre každú množinu máme

$$|A| = \sum_{x \in M} \chi_A(x).$$

Teda vlastne na zdôvodnenie (5.3) nám stačí zdôvodniť rovnosť zodpovedajúcich charakteristických funkcií. T.j. chceli by sme zdôvodniť niečo takéto:

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I| = k}} \chi_{\bigcap_{i \in I} A_i}.$$

Táto rovnosť bude určite vyzerať o čosi prehľadnejšie ak nebudeme ako dolné indexy prieniky. Kvôli stručnosti si teda označme $M_I = \bigcap_{i \in I} A_i$ a vlastne chceme dokázať rovnosť

$$\chi_M = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\dots,n\} \\ |I| = k}} \chi_{M_I}. \tag{5.4}$$ **{pie:EQPIACHAR}**

T.j. pre každé $x \in M$ chceme dokázať, že platí

$$\chi_M(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x). \tag{5.5}$$ {pie:EQPIACHAR

Teraz už vlastne môžeme takmer bez zmeny zopakovať úpravy na konci predošlého dôkazu. Pre každé $x \in M$ máme nejaké $s \in \{1,2,\ldots,n\}$ také, že x patrí práve do s množín spomedzi $A_1,\ldots,A_n$. Stačí nám už len skontrolovať, že pre takéto x dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \chi_{M_I}(x) = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \binom{s}{k} = 1.$$

□

Poznámka 5.1.2. Môžeme si všimnúť, že v tomto druhom dôkaze sme vlastne dokázali o čosi silnejšie tvrdenie: Vieme, že platí dokonca rovnosť charakteristických funkcií, nie iba rovnosť pre počty prvkov. Ale túto vetu chceme aj tak používať hlavne na počítanie prvkov rôznych zjednotení množín, takže nám úplne stačí takýto výsledok.

Ak náhodou niekomu pomôže vyskúšať si na malých prípadoch to, čo sme vyššie zapísali všeobecne, tak sa opäť môžeme pozrieť na zjednotenie dvoch či troch množín.

$$\chi_{A\cup B(x)} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$$

$x \in A$	$x \in B$	$\chi_A(x)$	$\chi_B(x)$	$\chi_{A\cap B}(x)$	$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$
✓	✓	1	1	1	$(1+1)-1=1$
✓	x	1	0	0	$(1+0)-0=1$
x	✓	0	1	0	$(0+1)-0=1$

$$\chi_{A\cup B\cup C(x)} = \chi_A(x) + \chi_B(x) + \chi_C(x) - \chi_{A\cap B}(x) - \chi_{A\cap C}(x) - \chi_{B\cap C}(x) + -\chi_{A\cap B\cap C}(x)$$

$\chi_A(x)$	$\chi_B(x)$	$\chi_C(x)$	$\chi_{A\cap B}(x)$	$\chi_{A\cap C}(x)$	$\chi_{B\cap C}(x)$	$\chi_{A\cap B\cap C}(x)$	$\sum$
1	1	1	1	1	1	1	$(1+1+1)-(1+1+1)+1=1$
1	1	0	1	0	0	0	$(1+1+0)-(1+0+0)+0=1$
1	0	1	0	1	0	0	$(1+0+1)-(0+1+0)+0=1$
0	1	1	0	0	1	0	$(0+1+1)-(0+0+1)+0=1$
1	0	0	0	0	0	0	$(1+0+0)-(0+0+0)+0=1$
0	1	0	0	0	0	0	$(0+1+0)-(0+0+0)+0=1$
0	0	1	0	0	0	0	$(0+0+1)-(0+0+0)+0=1$

Môžeme si všimnúť, že vpravo sme dostali naozaj súčty binomických koeficientov so striedavými znamienkami, konkrétne v jednotlivých zátvorkách máme čísla:

$$\begin{aligned} 3-3+1&=1\\ 2-1&=1\\ 1&=1 \end{aligned}$$

Cvičenia

Úloha 5.1.1. Koľkými spôsobmi sa dajú permutovať písmená slova KOMBINATORIKA tak, aby sa neopakovali dve písmená po sebe.

Úloha 5.1.2. [Kn, Cvičenie 4.9], [HKŠ, Example 1.6.3(iii)] Koľko šesťpísmenkových slov možno zostaviť z písmen slova TIKTAK, ak dve rovnaké písmená nesmú nasledovať bezprostredne za sebou.

Úloha 5.1.3. [HKŠ, Exercise 1.6.4(iii)] Koľkými spôsobmi sa dajú permutovať písmená slova BARBAR tak, aby nenasledovali tesne po sebe?

Úloha 5.1.4. [B, 2.44] Koľko existuje prirodzených čísel bez štvorcov, ktoré nepresahujú 100? (Prirodzené číslo n je číslo bez štvorcov, ak pre $k \in \mathbb{N}$ z $k^2 \mid n$ vyplýva $k = 1$. Inak povedané, nie je deliteľné žiadnou netriviálnou druhou mocninou.)

Hint: Pomôže zamyslieť sa nad tým, ako môže vyzerať prvočíselný rozklad čísla bez štvorcov.

Úloha 5.1.5. Uvažujme riešenia rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 48$ v nezáporných celých číslach
a) Koľko existuje riešení takých, kde všetky tri čísla x_1, x_2, x_3 sú rôzne?
b) Koľko existuje riešení takých, že $x_1 < x_2 < x_3$?

{piecvic:ULOTRINARODYA}

Úloha 5.1.6. [Kn, Cvičenie 4.10], [HKŠ, Exercise 6.6(iii)], [Ml, Example 4.4(a)], [V, Problem 214] Koľkými spôsobmi možno do radu usadiť troch Angličanov, troch Francúzov, troch Talianov tak, aby žiadni traja krajania nesedeli vedľa seba.

{piecvic:ULOTRINARODYB}

Úloha 5.1.7.

Úloha 5.1.8. [Ml, Exercise 4.20] Koľkými spôsobmi sa dá ofarbiť šachovnica 8×8 ôsmymi farbami, ak v každom riadku sa musí vyskytnúť všetkých osem farieb a súčasne v každom stĺpci pre susedné políčka musíme použiť rôzne farby?

Úloha 5.1.9. [Ma, Exercise 3.1.4(a)] Máme štandardný balíček 52 kariet (t.j. $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\} \times \{\clubsuit, \blacklozenge, \spadesuit, \heartsuit\}$). Koľkými spôsobmi sa dá vybrať 13 kariet tak, aby sa medzi nimi bola aspoň jedna karta z $\clubsuit$, aspoň jedna karta z $\blacklozenge$, aspoň jedna z $\spadesuit$, aspoň jedna z $\heartsuit$.

Úloha 5.1.10. Aký je počet reťazcov dĺžky n z písmen A, B, C, D, E; pričom A, B aj C sa majú vyskytnúť aspoň raz?

Úloha 5.1.11. [HKŠ, Exercise 6.3(iv)] Koľkými spôsobmi sa dá uložiť n veží na šachovnicu $n \times n$ tak, aby každé políčko bolo obsadené alebo ohrozené niektorou z nich? (Odpoveď: $2n^n - n!$.)

5.2 Permutácie bez pevného bodu

5.2.1 Definícia a rekurzívne vyjadrenie

Chceli by sme skúsiť vypočítať, koľko existuje permutácií $\varphi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takých, že
$$\varphi(i) \neq i$$
pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$. T.j. zaujímajú nás *permutácie bez pevného bodu.*

Počet takýchto permutácií si označme D_n. (V angličtine sa používa názov derangement.)

Ľahko sa dajú vymyslieť nejaké príklady situácií, kedy sa takéto niečo vyskytne:

- Klasický príklad, na ktorom sa tento problém zvykne ilustrovať: n ľudí si niekam odloží svoj dáždnik (kabát, klobúk) – a pri odchode si náhodne zoberie niektorý z odložených. Aká je pravdepodobnosť, že každý má cudzí dáždnik?
- Učiteľ vysvetlí študentom správne riešenie a potom im rozdá domáce úlohy, aby si ich obodovali – ale chce to urobiť tak, aby nikto nehodnotil svoju vlastnú úlohu.

Pre malé n by sme asi boli aj vypísať všetky prípady.
Napríklad pre $n = 2$ dostaneme jedinú takú permutáciu $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$.
Pre $n = 3$ dostaneme dve permutácie

$$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right) \quad \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)$$

Pre $n = 4$ ich už bude viacej, ale opäť po troche skúšanie by sme azda vedeli nájsť všetky

$$\begin{matrix}
\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{smallmatrix}\right)\\
\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{smallmatrix}\right)\\
\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{smallmatrix}\right)
\end{matrix}$$

Poďme sa skúsiť zamyslieť, či by sme vedeli nájsť D_n aj pre väčšie n nejako o čosi inteligentnejšie než prechádzaním jednotlivých možností.

Konkrétne sa pokúsime odvodiť, že platí takýto vzťah

{der:EQREKUR}
$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \tag{5.6}$$

pre všetky $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

Dôkaz rekurentného vzťahu (5.6). Označme si $\varphi(1) = k$. Na voľbu k máme presne $(n-1)$ možností.

- Ak $\varphi(k) = 1$, tak mám D_{n-2} možností ako poprehadzovať ostatných $n-2$ prvkov, t.j. ako vyrobím permutáciu množiny $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1, k\}$ bez pevného bodu;
- Ak chcem spočítať počet možností takých, že $\varphi(k) \neq 1$, tak pozície $2, 3, \dots, n$ umiestňujem čísla z $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ pričom na každej pozícii mám práve jednu zakázanú možnosť. Teda takýchto permutácií bude D_{n-1}.

□

$$\begin{pmatrix}1 & \dots & k & \dots\\ k & \underbrace{\dots}_{\text{tu}} & 1 & \underbrace{\dots}_{\text{a tu}}\end{pmatrix}$$

je $(n-2)$ pozícií, ktoré môžem spermutovať D_{n-2} spôsobmi.

$$\begin{pmatrix}1 & \dots & k & \dots\\ k & \dots & \varphi(k) \neq 1 & \dots\end{pmatrix}$$

na každej pozícii mám zakázanú jednu z $(n-1)$ možností

Z tejto rekurencie sa dá dopracovať aj k vzťahu

{der:EQREK2}
$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \tag{5.7}$$

ktorý je azda ešte o trochu jednoduchší (úloha 5.2.1).

Dôkaz založený na tej istej základnej myšlienke môžeme zapísať aj trochu inak:

Dôkaz rekurentného vzťahu (5.6). Označme $\varphi(1) = k$. Na tejto pozícii sa môže vyskytnúť práve $(n-1)$ rôznych čísel. Podobne ako vyššie, ideme rozobrať počty možností v závislosti od toho, či $\varphi(k) = 1$ alebo $\varphi(k) \neq 1$.

Označme si τ permutáciu, ktoré vymieňa 1 a k (a všetky ostatné prvky necháva na mieste). Budeme sa pozerať na permutáciu $\psi = \tau \circ \varphi$.

Všimnime si, že $\psi(1) = 1$, teda takáto zložená permutácia necháva jednotku na mieste. Súčasne pre $j \notin \{1, k\}$ máme $\psi(j) = \varphi(j)$, teda s výnimkou pozícií 1 a k sa táto permutácia správa presne ako pôvodná permutácia.

Ešte sa oplatí uvedomiť si aj to, že z permutácie ψ vieme dostať φ, konkrétne platí $\tau \circ \psi = \varphi$.

- Ak $\varphi(k) = 1$, tak $\psi(k) = k$. Teda permutácia ψ má práve jeden pevný bod, konkrétne k. Ak sa pozeráme už iba na ostatné prvky $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{1, k\}$, tak na tejto množine máme permutáciu bez pevného bodu a tu máme teda D_{n-2} možností.
- Ak $\varphi(k) \neq 1$, tak $\psi(k) \neq k$. Teda permutácia ψ zúžená na $\{2, 3, \ldots, n\}$ je permutácia bez pevného bodu, teda máme práve D_{n-1} možností.
- Súčasne si treba uvedomiť, že v oboch prípadoch každej permutácii φ (vyhovujúcej uvedeným podmienkam) zodpovedá práve jedna permutácia ψ a obraátene.

V oboch prípadoch nám zobrazenie $\varphi \mapsto \varphi \circ \tau$ dalo bijekciu medzi nejakými množinami permutácií. V prvom prípade medzi permutáciami takými, že $\varphi(k) = 1$ a množinou permutácií, ktorá má práve D_{n-2} prvkov. V druhom prípade sme sa pozerali na tie permutácie, kde $\varphi(k) \neq 1$ a takto □

Pomocou (5.6) či (5.7) vieme vyčísliť D_n pre viaceré ďalšie hodnoty n. Vypíšme si aspoň zopár malých prípadov.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496

5.2.2 Vyjadrenie D_n pomocou princípu inklúzie a exklúzie

Princíp zapojenia a vypojenia sa dá použiť na to, aby sme vedeli D_n vyjadriť nasledovným spôsobom:

{der:VTPIE}

Veta 5.2.1. *Pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \tag{5.8}$$ {der:EQPIE}

Poznamenajme, že rovnosť (5.8) by sme vedeli odvodiť aj matematickou indukciou na základe rekurentného vzťahu 5.7 (úloha 5.2.2). Dôkaz pomocou princípu zapojenia má tú výhodu, že tam nám takéto vyjadrenie vyjde; ak by sme chceli postupovať matematickou indukciou, tak by sme museli nejako „uhádnuť“ čomu sa rovná pravá strana (t.j. prísť na to, aké tvrdenie vlastne chceme dokazovať indukciou).

Dôkaz. Ak si ako X označíme množinu všetkých permutácií množiny $\{1,2,\dots,n\}$ a ako A_i množinu tých permutácií, ktoré nemenia prvok i, tak vlastne chceme vypočítať počet prvkov množiny $X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$.

$$\begin{aligned} X &= S_n \\ A_i &= \{\varphi \in S_n; \varphi(i) = I\} \\ D_n &= |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)| = ? \end{aligned}$$

Toto je presne situácia z vety 5.1.1.

Pozrime sa na to, čo by sme vedeli povedať o sčítancoch tvaru

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|.$$

Toto je vlastne počet permutácií, ktoré nechávajú ne mieste čísla $i_1, i_2, \dots, i_k$. Takých permutácií je presne $(n-k)!$.

Túto hodnotu teraz vlastne len dosadíme do (5.2), t.j. do vzťahu

$$\left|X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right| = |X| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \dots$$
$$\dots + (-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|,$$

len si pritom ešte uvedomíme, že pre každú voľbu $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ dostaneme v tú istú hodnotu, teda k-ty sčítanec môžeme zjednodušiť takto.

$$(-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

Tento výraz ešte môžeme trochu zjednodušiť na základe toho, že

$$\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Dostávame tak vyjadrenie pre D_n, ktoré ešte trochu upravíme:

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (-1)^k \frac{n!}{k!},$$

čo je naozaj rovnosť (5.8). □

{der:POZNPIEROVNAKE}

Poznámka 5.2.2. Všimnime si, že vyjadenie sumy z princípu zapojenia a vypojenia sa výrazne zjednodušila tým, že pre každý výber k-tice $i_1, \dots, i_k$ bol počet prvkov v prieniku $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ rovnaký. T.j. vlastne celá suma sa zmenila na

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P_k,$$

kde P_k označuje počet prvkov v prieniku k množín a P_0 označuje $|X|$.

{der:EQPIE2}
$$\frac{D_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right) \tag{5.9}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$
$$e^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+\frac{(-1)^n}{n!}+\dots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{n!}=\frac{1}{e} \tag{5.10}$$ {der:EQLIM}

Ak sa vrátime k príkladom zo začiatku tejto časti, tak sa to dá interpretovať tak, že pravdepodobnosť že si nikto nezobral naspäť svoj dáždnik je približne $\frac{1}{e}$. (Alebo pravdepodobnosť, že po náhodnom rozdaní ani jeden študent či študentka neopravuje svoju domácu úlohu, je približne $\frac{1}{e}$.)

Môžeme si všimnúť, že D_n je naozaj pomerne blízko hodnoty $\frac{n!}{e}$. (Už pre pomerne malé n neurobíme priveľmi veľkú chybu, ak D_n odhadneme číslom $\frac{n!}{e}$.)

$$\begin{aligned}R_n=\left|D_n-\frac{n!}{e}\right|&=n!\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\dots\right)\\&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\dots\end{aligned}$$

Dostali sme teda, že platí:
$$\left|D_n-\frac{n!}{e}\right|<\frac{1}{n+1}.$$

5.2.3 Ďalšie vlastnosti D_n

Vzťah (5.8) vyjadruje D_n ako súčet výrazov s faktoriálmi $1!, 2!, \dots, n!$. Nasledujúci vzťah je do istej miery obrátený – faktoriál je vyjadrený pomocou $D_1, \dots, D_n$.

$$n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}D_k \tag{5.11}$$ {der:EQFAKT}

Dôkaz sme ponechali ako cvičenie – úloha 5.2.4.

Cvičenia

{dercvic:ULOREKUR}

Úloha 5.2.1. Ukážte, že $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$ platí pre všetky $n\in\mathbb{N}$.

{dercvic:ULOBEZPIE}

Úloha 5.2.2. Ukážte rovnosť (5.8) matematickou indukciou a použitím (5.7). (T.j. bez použitia princípu zapojenia a vypojenia.)

{dercvic:ULOKFIXED}

Úloha 5.2.3. Uvažujme permutácie množiny $\{1,2,\dots,n\}$. Ako sa dá vyjadriť počet permutácií, ktoré majú práve k pevných bodov?

{dercvic:ULOF

Úloha 5.2.4. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k,$$

t.j. rovnosť (5.11).

Úloha 5.2.5. [Kn, Cvicenie 4.9] Dvaja učitelia skúšajú súčasne skupinu 4 študentov, každý jeden predmet. Každý študent odpovedá z jedného predmetu 30 minút. Koľko existuje rozvrhov skúšania, ak požadujeme, aby skúšky skončili za dve hodiny?

5.3 Počet surjektívnych zobrazení

Ak sme poznali veľkosti množín A a B, tak sme veľmi jednoducho vedeli vyjadriť počet všetkých zobrazení a aj počet injektívnych zobrazení $A \to B$. Vedeli by sem niečo povedať o počet surjekcií? Pozrieme sa na tento problém pomocou princípu zapojenia a vypojenia.

Označme si (pre potreby tejto časti) ako $\mathrm{Sur}(n,k)$ počet všetkých surjektívnych zobrazení z n-prvkovej množiny do k-prvkovej množiny. Vidíme napríklad, že $\mathrm{Sur}(n,k) = 0$ pre $n < k$. Alebo tiež si ľahko uvedomíme, že $\mathrm{Sur}(n,n) = n!$ a $\mathrm{Sur}(n,1) = 1$. A pre nejaké malé hodnoty n a k by sme skúšaním vedeli nájsť $\mathrm{Sur}(n,k)$.

{surj:POZNSTIR}

Poznámka 5.3.1. Počet surjektívnych zobrazení z k-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny do súvisí aj s počtom rozkladov n-prvkovej množiny na k neprázdnych častí, takémuto problému sa venujeme v časti 6.1.1. Konkrétne platí $\mathrm{Sur}(n,k) = k! \left\{ {n \atop k} \right\}$, kde $\left\{ {n \atop k} \right\}$ predstavuje počet rozklad n-prvkovej množiny na k podmnožín; pozri poznámku 6.1.2.

Poďme sa pozrieť na to, že ako sa $\mathrm{Sur}(k,n)$ dá vyjadriť pomocou princípu zapojenia a vypojenia.

Tvrdenie 5.3.2. *Nech $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k < n$ a X, Y sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = k$. Potom počet surjekcií z A do B je rovný*

{surj:EQPIE}

$$\mathrm{Sur}(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n. \tag{5.12}$$

Uvedenú rovnosť môžeme prepísať ako:

{surj:EQPIE2}

$$\begin{aligned} \mathrm{Sur}(n,k) = k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(n-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \dots \\ \dots + (-1)^{k-2}\binom{k}{k-2}2^n + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n \end{aligned} \tag{5.13}$$

Dôkaz. Pozeráme sa na zobrazenia z n-prvkovej množiny do k-prvkovej množiny, bez ujmy na všeobecnosti si môžeme zobrať priamo $B = \{1, 2, \dots, k\}$. Keďže chceme surjekcie, tak chceme aby každý prvok $i \in Y$ mal vzor, t.j. také zobrazenia, že množina $f^{-1}(\{i\})$ je neprázdna.

Označme si pre $i = 1, 2, \dots, k$ ako A_i množinu takých zobrazení, kde sa nič nezobrazí na i.

$$A_i = \{f \colon A \to B; f^{-1}(\{i\}) = \emptyset\}$$

Ak ešte ako X označíme množinu všetkých zobrazení $A \to B$, tak vlastne hľadáme

$$\operatorname{Sur}(n,k) = \left| X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \right|,$$

čiže môžeme aplikovať princípe zapojenia a vypojenia v podobe (5.2), ak sa nám podarí vyjadriť veľkosti množín, ktoré tu vystupujú.

Máme $|X| = k^n$. Množina

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}$$

pozostáva z tých zobrazení, kde sa nič nezobrazí na žiadny z prvkov $i_1, i_2, \dots, i_j$. T.j. máme zostávajúcich $n - j$ prvkov, na ktoré sa môže niečo zobraziť – a takýchto zobrazení je presne $(k - j)^n$.

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| = (k-j)^n$$

$$(-1)^j \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_j \le n}^{n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| = (-1)^j \binom{n}{j} (k-j)^n$$

Z vety 5.1.1 potom dostaneme rovnosť

$$\operatorname{Sur}(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n,$$

kde sčítanec zodpovedajúci $j = 0$ je počet prvkov celej množiny $|X| = k^n$. □

5.4 Eulerova funkcia

5.4.1 Vyjadrenie Eulerovej funkcie pomocou prvočíselného rozkladu

Definícia 5.4.1. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N}; 1 \le k \le n, \gcd(k,n) = 1\}|,$$

t.j. $\varphi(n)$ označuje počet celých čísel $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n.

Túto funkciu $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazývame *Eulerova funkcia*.

Pre malé hodnoty vieme nájsť hodnotu $\varphi(n)$ aj tak, že vyskúšame, ktoré čísla sú nesúdeliteľné s n.

n	$\varphi(n)$	$\{k; \gcd(k,n) = 1\}$
1	1	$\{1\}$
2	1	$\{1\}$
3	2	$\{1,2\}$
4	2	$\{1,3\}$
5	4	$\{1,2,3,4\}$
6	2	$\{1,5\}$
7	6	$\{1,2,3,4,5,6\}$
8	4	$\{1,3,5,7\}$
9	6	$\{1,2,4,5,7,8\}$
10	4	$\{1,3,7,9\}$

Ľahko si vieme rozmyslieť napríklad to, že pre prvočísla máme $\varphi(p) = p - 1$. A nie je moc ťažké nájsť hodnotu Eulerovej funkcie ani pre mocniny prvočísel, vtedy dostaneme

$$\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^{a-1}(p-1) = p^a\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

{euler:VTPROD}

Veta 5.4.2. *Nech $n \in \mathbb{N}_0$. Potom platí*

{euler:EQPROD}

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right), \tag{5.14}$$

kde súčin na pravej strane prebieha cez všetky prvočíselné delitele čísla n.

Uvedený výraz vieme zapísať aj tak, že ak $n = p_1^{a_1}\dots p_k^{a_k}$ je kanonický rozklad čísla n, tak

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k}(p_j^{a_j} - p_j^{a_j-1}) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{a_j-1}(p_j - 1).$$

(Skúste si rozmyslieť, že oba tieto zápisy predstavujú to isté.)

Príklad 5.4.3. Napríklad ak $n = p^a$ pre nejaké prvočíslo, tak z (5.14) dostaneme presne to isté vyjadrenie, ktoré sme už spomenuli vyššie:

$$\varphi(p^a) = p^a\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Môžeme tiež skontrolovať, že

$$\varphi(6) = 6\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 - \frac{1}{3}) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 2$$
$$\varphi(10) = 6\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 - \frac{1}{5}) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 4$$

Dôkaz. V množine $X = \{1, 2, \dots, n\}$ chceme nájsť všetky čísla, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n. Označme $p_1, p_2, \dots, p_k$ všetky prvočíselné delitele čísla n. Z množiny X chceme vlastne dať preč tie čísla, ktoré sú deliteľné niektorým z týchto prvočísel, čiže prvky množín

$$A_i = \{s \in X; p_i \mid s\}.$$

Zaujíma nás teda

$$\varphi(n) = |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)|.$$

Pritom vieme vypočítať počty prvkov jednotlivých prienikov vystupujúcich v princípe zapojenia a vypojenia.

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}$$
$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}}$$
$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| = \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_j}}$$

Teda na základe princípu zapojenia a vypojenia dostaneme:

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i_1 < i_2 \le k} \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^j \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_j\le n} \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_j}} + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1p_2\dots p_k}.$$

Z každého z týchto členov môžeme vyňať n a dostaneme tak

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p} + \sum_{1\le i_1<i_2\le k} \frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{p_1p_2\dots p_k}\right).$$

Teraz si už treba uvedomiť, že výraz v zátvorke na pravej strane je to isté, čo dostaneme roznásobením nasledujúceho súčinu:

$$\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) = \left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

□

Ak poznáme vyjadrenie pre $\varphi(n)$ na základe kanonického rozkladu, tak je pomerne ľahké overiť nasledujúce vlastnosti – dôkaz sme ponechali ako cvičenie (úlohy 5.4.3 a 5.4.4).

{euler:DOSMULT}

Dôsledok 5.4.4. *Ak $m, n \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné, t.j.* $\gcd(m, n) = 1$*, tak platí*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Funkcie, ktoré majú vlastnosť z dôsledku 5.4.4 sa zvyknú volať aj *multiplikatívne funkcie.* S takýmito funkciami sa môžete stretnúť aj na iných predmetoch, pozri [S].

{euler:DOSMULT2}

Dôsledok 5.4.5. *Pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ označme $d = \gcd(m, n)$. Potom platí*

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)}.$$

Môžeme porovnať výpočet hodnoty φ pomocou vety 5.4.2 a dôsledku 5.4.4 – ten nám umožní používať hodnoty funkcie φ v mocninách prvočísel.

Príklad 5.4.6. Majme $n = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

$$\varphi(360) = 360\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{360\cdot 4}{3\cdot 5} = 96$$
$$\varphi(360) = \varphi(2^3)\varphi(3^2)\varphi(5) = 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 4 = 2^5\cdot 3 = 96$$

Pozrime sa na to, že Eulerova funkcia nám niekedy môže pomôcť pri type príkladov, na ktoré by sme typicky používali princíp zapojenia a vypojenia.

Príklad 5.4.7. Koľko je prirodzených čísel n takých, že $n \le 200$ a n nie je deliteľné žiadnym z čísel 2, 5, 7?

Tieto čísla sú dosť malé na to, že sme schopní ich aj vypísať. (A azda pri troche rozmýšľania by sme prišli na to, že možno netreba vypisovať všetko až po 200; čo snáď bude jasné aj z riešení, ktoré si ukážeme.)

V nasledujúcej tabuľke sú zvýraznené „zlé“ čísla, t.j. všetky párne čísla, všetky násobky päťky a všetky násobky sedmičky.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	20
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	180
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Vidíme, že biele štvorčeky zostali iba v štyroch stĺpcoch a spolu ich je $17+18+17+17 = 69$.

Pozrime sa na to, ako túto úlohu vieme vyriešiť rozumnejšie než vypisovaním možností – to v akej kapitole je úloha zaradená nám nepriamo prezrádza, čo by sme tam asi mohli použiť.

Riešenie pomocou PIE.

$$\begin{aligned} X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 200 - \left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{14} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{200}{70} \right\rfloor \\ &= 200 - 100 - 40 - 28 + 20 + 14 + 5 - 2 = 69 \end{aligned}$$

□

Riešenie pomocou Eulerovej funkcie. Máme $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ a

$$\varphi(70) = 70 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 70 \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 5 \cdot 7} = 24.$$

To znamená, že medzi číslami 1 až 70 je práve 24 čísel nesúdeliteľých s číslom 70; čo je iba inak vyjadrená podmienka, že nemajú byť deliteľné 2, 5 ani 7.

Situácia bude presne rovnaká pre každý úsek po sebe idúcich čísel dĺžky 70, teda aj od 71 po 140 a tiež od 141 po 210.

Vidíme teda, že čísel vyhovujúcich daných podmienkam takých, že $n \leq 210$ je presne $3 \cdot 24 = 72$. V rozsahu $201 \leq n \leq 210$ máme iba tri takéto čísla: 201, 207 a 209.

Teda čísel vyhovujúcich zadaniu, ktoré majú veľkosť nanajvýš 200, je práve $72 - 3 = 69$. □

5.4.2 Niektoré vlastnosti Eulerovej funkcie

Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí

euler:EQSUMN}
$$n = \sum_{d|n} \varphi(d), \tag{5.15}$$

pričom sumu na pravej strane chápeme tak, že sčitujeme cez všetky *prirodzené* čísla d, ktoré sú deliteľmi čísla n. (Úloha 5.4.1.)

Môžeme si tiež všimnúť, že s výnimkou prípadov $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ dostávame ako hodnoty funkcie φ iba párne čísla (úloha 5.4.2).

5.4.3 Eulerova funkcia a kongruencie

Keďže sme sa trochu zaoberali Eulerovou funkciou, azda sa patrí aspoň spomenúť Eulerovu vetu – čo je veľmi známy výsledok o kongruenciách. (A je vcelku možné, že ste sa už niekde stretli aspoň s Malou Fermatovou vetou, ktorá je jej špeciálnym prípadom.)

Naozaj ich však iba spomenieme, nebudeme sa nijako venovať dôkazom – tie necháme na iné predmety. Pozri napríklad [Č], [S], [ŠHHK, Veta 3.3.5], [JJ, Theorem 5.3].

Veta 5.4.8 (Eulerova veta)**.** *Nech* $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *sú také, že* $\gcd(a, n) = 1$. *Potom platí*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Príklad 5.4.9. Napríklad pre $n = 16$ máme $\varphi(16) = 8$. Vieme pomerne ľahko skontrolovať, že platí:

$$\begin{aligned}
1^8 &\equiv 1 \pmod{16}\\
3^8 &\equiv (3^2)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{16}\\
5^8 &\equiv (5^2)^4 \equiv 9^4 \equiv (9^2)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{16}\\
7^8 &\equiv (7^2)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{16}
\end{aligned}$$

Pre zvyškové triedy 9, 11, 13 a 15 máme

$$\begin{aligned}
9^8 &\equiv (-7)^8 \equiv (-1)^8 7^8 \equiv 7^8 \equiv 1 \pmod{16}\\
11^8 &\equiv (-5)^8 \equiv (-1)^8 5^8 \equiv 5^8 \equiv 1 \pmod{16}\\
13^8 &\equiv (-3)^8 \equiv (-1)^8 3^8 \equiv 3^8 \equiv 1 \pmod{16}\\
15^8 &\equiv (-1)^8 \equiv (-1)^8 1^8 \equiv 1^8 \equiv 1 \pmod{16}
\end{aligned}$$

Tým sme pokryli všetky zvyškové triedy nepárnych čísel modulo 16.

Môžeme si všimnúť, že pre $n = 16$ platí dokonca o čosi viac. Z Eulerovej vety dostávame, že pre nepárne a by malo platiť $a^8 \equiv 1 \pmod{16}$. Výpočty, ktoré sme uviedli vyššie, ukazujú, že platí dokonca aj $a^4 \equiv 1 \pmod{16}$

Príklad 5.4.10. $\varphi(9) = 6$, teda Eulerova veta nám hovorí, že ak

$$a^6 \equiv 1 \pmod{9}$$

pre každé $a \in \mathbb{Z}$ také, že $\gcd(a, 9) = 1$. T.j. pre celé čísla a také, že $3 \nmid a$. Opäť aj tu vieme vcelku ľahko skontrolovať, že to je naozaj pravda.

$$
\begin{aligned}
1^6 &\equiv 1 \pmod 9\\
2^6 &\equiv (2^3)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 9\\
4^6 &\equiv (4^3)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 9\\
5^6 &\equiv (-4)^6 \equiv 4^6 \equiv 1 \pmod 9\\
7^6 &\equiv (-2)^6 \equiv 4^6 \equiv 1 \pmod 9\\
8^6 &\equiv (-1)^6 \equiv 4^6 \equiv 1 \pmod 9
\end{aligned}
$$

Ak použijeme Eulerovu vetu na prípad, keď p je prvočíslo a $\varphi(p) = p-1$, dostaneme Malú Fermatovu vetu:

Veta 5.4.11 (Malá Fermatova veta)**.** *Nech $a \in \mathbb{Z}$ a p je prvočíslo. Potom platí*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Tento výsledok môžeme sformulovať aj tak, že pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Z}$ platí

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

Malá Fermatova veta nám napríklad dáva nejakú možnosť, ako počítať inverzný prvok v poli $\mathbb{Z}_p$. Takéto niečo ste možno spomenuli aj v zimnom semestri na lineárnej algebre.[2]

Cvičenia

{eulercvic:ULOSUMN}

Úloha 5.4.1. Ukážte, že pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$, t.j. rovnosť (5.15). (Hint: Môže pomôcť skúsiť nejako rátať, koľko je takých $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, pre ktoré $\gcd(k, n) = d$.)

{eulercvic:ULOPARNE}

Úloha 5.4.2. Ukážte, že pre $n > 2$ je $\varphi(n)$ párne číslo.

{eulercvic:ULOMULT}

Úloha 5.4.3. Ukážte, že ak $m, n \in \mathbb{N}$ sú nesúdeliteľné, tak platí $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. (T.j. dokážte dôsledok 5.4.4.)

{eulercvic:ULOMULT2}

Úloha 5.4.4. Ukážte, že pre ľubovoľné $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{d}{\varphi(d)},$$

kde $d = \gcd(m, n)$. (T.j. dokážte dôsledok 5.4.4.)

Úloha 5.4.5. Koľko prirodzených čísel $n \le 1000$ je deliteľných dvojkou alebo sedmičkou?

Úloha 5.4.6. Koľko je prirodzených čísel $n \le 1000$, ktoré sú deliteľné dvojkou, trojkou alebo päťkou?

Úloha 5.4.7. [V, Problem 136] Koľko je celých čísel v rozsahu 0 až 999, ktoré nie sú deliteľné päťkou ani sedmičkou

Úloha 5.4.8. Koľko je prirodzených celých čísel n takých, že $1 \le n \le 250$ a súčasne n nie je deliteľné žiadnym z čísel 2, 3, 5, 7?

Úloha 5.4.9. Koľko je prirodzených čísel $n \le 2000$, ktoré nie sú deliteľné dvojkou, trojkou ani päťkou, ale súčasne sú deliteľné sedmičkou. T.j. $7 \mid n$, $2 \nmid n$, $3 \nmid n$, $5 \nmid n$.

[2] `https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=2005`

5.5 Möbiova funkcia

{mobiusSEC}{mobiusDEF}

Definícia 5.5.1. Pre $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$\mu n = \begin{cases} 1 & \text{ak } n = 1, \\ (-1)^k & \text{ak } n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ kde } p_1, p_2, \dots, p_k \text{ sú rôzne prvočísla} \\ 0 & \textit{inak}. \end{cases}$$

Funkciu μ nazývame *Möbiova funkcia.*

{TVREULERMOBI}

Tvrdenie 5.5.2. *Pre každé prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \mu(d) d$$

Dôkaz. Označme si všetky prvočísla vyskytujúce sa v rozklade čísla n ako $p_1, p_2, \dots, p_k$. Eulerova funkcia $\varphi(n)$ vracia počet prirodzených čísel z rozsahu $1, 2, \dots, n$, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n. Teda ak si označíme

$$\begin{aligned} X &= \{1, 2, \dots, n\} \\ A_i &= \{k \in n; p_i \mid k\} \end{aligned}$$

tak vlastne chceme vypočítať $\varphi(n) = |X \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k\}|$.

Počty prvkov v týchto množinách sú:

$$\begin{aligned} |X| &= n \\ |A_i| &= \frac{n}{p_i} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2}| &= \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| &= \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}} \end{aligned}$$

Dostávame teda

$$\varphi(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \sum \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}},$$

kde vnútorná suma prebieha cez všetky j-prvkové podmnožiny $\{i_1, i_2, \dots, i_j\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$.

Keď porovnáme tento výraz s definíciou Möbiovej funkcie, je to to isté ako rovnosť

$$n \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Jediný rozdiel je, že sme pridali aj sčítance pre tie delitele, kde deliteľ d obsahuje vyššie mocniny prvočísel – v týchto prípadoch je však $\mu(d) = 0$, a teda neovplyvania hodnotu sumy. $\square$

Definícia 5.5.3. Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ označme $\pi(x)$ počet prvočísel, ktoré sú menšie alebo rovné x. Funkciu π voláme *prvočíselná funkcia.*

Príklad 5.5.4. Označme k-te prvočíslo ako p_k, t.j. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, atď. Potom platí {pie2:PRIKLPRI

$$\pi(n) = n - 1 + \pi(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \sum(-1)^k \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} \right\rfloor, \tag{5.16}$$ {pie2:EQPRIMES

pričom suma prebieha všetky neprázdne podmnožiny $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$

Dôkaz. Každé číslo z rozsahu $1, 2, \ldots, n$ je deliteľné niektorým prvočíslom takým, že $p^2 \le n$ t.j. $p \le \sqrt{n}$. Ak si označíme $K = \pi\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, stačí sa nám zaoberať prvočíslami $p_1, p_2, \ldots, p_K$.

Označme si $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $A_i = \{k \in X; p_i \mid k\}$. Čiže A_i obsahuje všetky čísla, ktoré sú deliteľné prvočíslom p_i a prienik $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ obsahuje tie čísla, ktoré sú deliteľné súčinom $p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}$. Môžeme si uvedomiť, že platí:

$$\begin{aligned} A_i &= \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor \\ A_{i_1} \cap A_{i_2} &= \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}} \right\rfloor \\ A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} &= \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}} \right\rfloor \end{aligned}$$

Ak použijeme PIE na tieto množiny, tak dostaneme

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_K)| = n - \sum(-1)^k \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} \right\rfloor.$$

Teda táto suma vyjadruje počet prvkov množiny $X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_K)$. Aké prvky obsahuje táto množina?

Sú to tie prirodzené čísla z rozsahu $1, 2, \ldots, n$, ktoré nie sú deliteľné žiadnym z prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_K$. To znamená, že spomedzi čísel takých, že $\sqrt{n} < k \le n$ sme vyhodili všetky zložené čísla. Súčasne sme však vyhodili aj prvočísla veľkosti nanajvýš $\sqrt{n}$. Ak teda chceme zarátať aj tie, potrebujeme pridať ešte tieto prvočísla, ktorých je práve $\pi(\sqrt{n}) = \pi\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. A ešte sme započítali aj jednotku, ktorá nie je prvočíslo. Takto naozaj dostaneme pre počet prvočísel vzťah (5.16). □

Sumu z 5.16 pomocou Möbiovej funkcie môžeme prepísať ako

{pie2:EQPIMU}

$$\pi(n) = n - 1 + \pi(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \sum \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \tag{5.17}$$

pričom suma prebieha cez všetky delitele d čísla $p_1p_2\cdots p_{\pi(\sqrt{n})}$.

Cvičenia

5.6 Ešte raz $x_1 + \cdots + x_k = n$

{riespie:SECT}

V časti 3.2 sme sa zaoberali celočíselnými riešeniami rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Ukázali sme, že takýchto riešení vyhovujúcim podmienke $x_i \ge 0$ je práve $\binom{n+k-1}{k-1}$ a pri podmienke $x_i \ge 1$ dostaneme presne $\binom{n-1}{k-1}$ riešení (tvrdenie 3.2.1 a dôsledok 3.2.4). Chceme sa teraz pozrieť na takúto otázku, ak nám okrem dolných ohraničení pribudnú aj horné ohraničenia.

Keď máme k dispozícii vetu 5.1.1, t.j. princíp zapojenia a vypojenia, tak vieme nájsť aspoň nejaký spôsob, ako niečo vyjadriť počet riešení.

pie:PRIKLPIE}

Príklad 5.6.1. Koľko existuje riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

v nezáporných celých čísla takých, že $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 6$, $x_3 \leq 12$?

Vlastne sa teda pozeráme na počet prvkov množiny

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15, 0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 12\}.$$

Označme si

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 15, 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3\},$$

t.j. na chvíľu ignorujeme horné ohraničenia. Počet prvkov tejto množiny vieme vypočítať na základe tvrdenia 3.2.1, je rovný $\binom{15+2}{2} = \binom{17}{2}$.

Máme v tejto množine však veľa trojíc navyše – konkrétne tie, kde $x_1 > 3$, $x_2 > 6$, $x_3 > 13$. Ak si označíme

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_1 \geq 4\} \\
A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_2 \geq 7\} \\
A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_3 \geq 13\}
\end{aligned}$$

tak vlastne chceme vypočítať

$$|S| = |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|.$$

Ak vieme vypočítať počty prvkov pre A_1, A_2, A_3 a prieniky týchto množín, tak dostaneme nejaké vyjadrenie pre počet prvkov tejto množiny. Toto sú však úlohy takého typu, aké sme už riešili (príklad 3.2.3 a viaceré cvičenia v časti 3.2). Stručne pripomeňme ako sme to robili.

Napríklad počet prvkov A_1, kde máme podmienku $x_1 \geq 4$ dostaneme tak, že vlastne máme:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 15 \\
(x_1 - 4) + x_2 + x_3 &= 11 \\
y_1 + y_2 + y_3 &= 11
\end{aligned}$$

Nové premenné $y_1 = x_1 - 4$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_4$ už zodpovedajú podmienkam $y_i \geq 0$ a z tvrdenia 3.2.1 a teda vieme vypočítať počet takýchto riešení ako $\binom{13}{2}$.

Podobne napríklad pre $A_1 \cap A_2$ by sme dostali nové premenné $y_1 = x_1 - 4$, $y_2 = x_2 - 7$, $y_3 = x_3$, čo vedie k hľadaniu počtu riešení $y_1 + y_2 + y_3 = 4$ v nezáporných celých číslach.

Môžeme si všimnúť, že niektoré z prenikov budú prázdne. Napríklad všetky trojice z $A_2 \cap A_3$ spĺňajú $x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 + 7 + 13 = 20$, teda nemôžu dať súčet 15.

Dostaneme teda:

$$\begin{aligned}
|X| &= \binom{17}{2}\\
|A_1| &= \binom{13}{2}\\
|A_2| &= \binom{10}{2}\\
|A_3| &= \binom{4}{2}\\
|A_1 \cap A_2| &= \binom{6}{2}\\
|A_1 \cap A_3| &= 0\\
|A_2 \cap A_3| &= 0\\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 0
\end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned}
|S| &= \binom{17}{2} - \binom{13}{2} - \binom{10}{2} - \binom{4}{2} + \binom{6}{2}\\
&= 136 - 78 - 45 - 6 + 15\\
&= 22
\end{aligned}$$

Čísla zadané v tejto úlohe sú dosť malé na to, že zvládneme aj vyskúšať všetky možnosti:

$$\begin{array}{cccc}
0+3+12 & 0+4+11 & 0+5+10 & 0+6+9\\
1+2+12 & 1+3+11 & 1+4+10 & 1+5+9\\
1+6+8 & 2+1+12 & 2+2+11 & 2+3+10\\
2+4+9 & 2+5+8 & 2+6+7 & 3+0+12\\
3+1+11 & 3+2+10 & 3+3+9 & 3+4+8\\
3+5+7 & 3+6+6 & &
\end{array}$$

Vyskúšajme ešte jeden pomerne malý príklad – aby sme na ňom mohli ilustrovať myšlienku, ktorá *niekedy* pomôže.

{riespie:PRIKLSUBST}

Príklad 5.6.2. [R, Example 8.6.1] Aký je počet celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

takých, že platí $0 \le x_1 \le 3$, $0 \le x_2 \le 4$ a $0 \le x_3 \le 6$?

Aj v tejto úlohe je počet riešení natoľko malý, že by sme zvládli aj vypísať všetky možnosti:

$$\begin{aligned}
11 &= 1+4+6\\
11 &= 2+3+6\\
11 &= 2+4+5\\
11 &= 3+2+6\\
11 &= 3+3+5\\
11 &= 3+4+3
\end{aligned}$$

Rozmyslite si, že sme tu skutočne nijaké riešenie nevynechali.

Skúsme najprv vyriešiť tento príklad takým istým spôsobom, aký sme už spomenuli vyššie.

Riešenie pomocou PIE. Vlastne chceme vypočítať $|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$ pre

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_i \geq 0\} \\ A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_1 \geq 4\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_2 \geq 5\} \\ A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in X; x_i \geq 0, x_3 \geq 7\} \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že $|A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$, keďže pre riešenia patriace do $A_2 \cap A_3$ máme $x_2 + x_3 \geq 12$.

Počty prvkov všetkých množín, ktoré potrebujeme pri použití vety 5.1.1 vieme opäť spočítať štandardným spôsobom:

$$\begin{aligned} |X| &= \binom{13}{2} \\ |A_1| &= \binom{9}{2} \\ |A_2| &= \binom{8}{2} \\ |A_3| &= \binom{6}{2} \\ |A_1 \cap A_2| &= \binom{4}{2} \\ |A_1 \cap A_3| &= \binom{2}{2} \end{aligned}$$

a teda počet riešení je

$$\begin{aligned} |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| &= \binom{13}{2} - \binom{9}{2} - \binom{8}{2} - \binom{6}{2} + \binom{4}{2} + \binom{2}{2} \\ &= 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 = 6 \end{aligned}$$

□

Uvedeným postupom sme dostali teda, že existuje šesť riešení – čo súhlasí s tým, že sme vypisovaním dostali práve šesť možností. Skúsme sa pozrieť ešte na iné trochu trikové riešenie.

Riešenie. Pozeráme sa na celočíselné riešenia

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

také, že $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 4$ a $0 \leq x_3 \leq 6$. Ak si zavedieme nové premenné

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 - x_1 \\ y_2 &= 4 - x_2 \\ y_3 &= 6 - x_3 \end{aligned}$$

tak aj $y_{1,2,3}$ sú celé čísla a máme tie rovnaké obmedzenia $0 \leq y_1 \leq 3$, $0 \leq y_2 \leq 4$ a $0 \leq y_3 \leq 6$. Ako vyzerá zodpovedajúca rovnica pre neznáme y_1, y_2, y_3?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 11 \\ (3 - x_1) + (4 - x_2) + (6 - x_3) &= 13 - 11 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

Dostali sme rovnicu toho istého typu ale s inou pravou stranou. Teraz ale máme výhodu, že nevyhnutne všetky riešenia spĺňajú $y_i \leq 2$. (Máme totiž $y_1 \leq y_1 + y_2 + y_3 = 2$, podobne pre ostatné dve premenné.)

Takže vlastne horné ohraničenia $y_1 \leq 3$, $y_2 \leq 4$, $y_3 \leq 6$ si nemusíme všímať – sú nevyhnutne splnené pre každú trojicu (y_1, y_2, y_3) vyhovujúcu tejto rovnici. Teda stačí použiť tvrdenie 3.2.1, ktoré hovorí o riešeniach takých, že $y_i \geq 0$. Dostaneme, že máme práve

$$\binom{4}{2} = 6.$$

□

Pokiaľ sú podmienky na všetky premenné rovnaké, tak nám trochu roboty ušetrí to, že dostaneme rovnaký počty prieniky dvojíc množín, trojíc množín, atď (poznámka 5.2.2).

{riespie:PRIKLPIESYM}

Príklad 5.6.3. Koľko existuje štvoríc celých čísel takých, že platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

a súčasne $0 \leq x_i \leq 10$.

Riešenie. Opäť chceme aplikovať PIE, pričom máme:

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4; x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\} \\ A_i &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in X; x_i \leq 10\} \end{aligned}$$

Pre počty prvkov jednotlivých množín máme:

$$\begin{aligned} |X| &= \binom{35}{3} \\ |A_i| &= \binom{24}{3} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2}| &= \binom{13}{3} \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| &= 0 \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 0 \end{aligned}$$

A teda pre počet riešení dostaneme

$$\begin{aligned} |S| &= |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| \\ &= \binom{35}{3} - \binom{4}{1}\binom{24}{3} + \binom{4}{2}\binom{13}{3} \\ &= \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{6} - \frac{4 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{6} + \frac{6 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6} \\ &= 11\,(35 \cdot 17 - 32 \cdot 23 + 13 \cdot 12) \\ &= 11(595 - 736 + 156) = 11 \cdot 15 = 165 \end{aligned}$$

□

Môžeme si všimnúť, že aj v tejto úlohe funguje trik z príkladu 5.6.2. Po substitúcii $y_i = 10 - x_i$ dostaneme

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8,$$

pričom obmedzenia $0 \leq y_i \leq 10$ sú už teraz redundantné. Teda počet riešení môžeme jednoducho vyjadriť ako
$$\binom{8+3}{3} = \binom{11}{3} = 165.$$
Takto sa teda dostaneme k riešeniu oveľa rýchlejšie – chceli sme však uviesť aj riešenie bez tohto triku, ako ešte jednu ilustráciu použitia PIE; v tomto prípade so symetrickými podmienkami.

Cvičenia

Úloha 5.6.1. [B, 2.21] Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ takých, že $1 \leq x_1 \leq 3$, $2 \leq x_2 \leq 4$, $3 \leq x_3 \leq 5$, $4 \leq x_4 \leq 6$?

Úloha 5.6.2. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$ takých, že $2 \leq x_i \leq 7$ pre $i = 1, 2, 3, 4$?

Úloha 5.6.3.

Úloha 5.6.4. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$
takých, že $2 \leq x_1 \leq 4$, $3 \leq x_2 \leq 6$, $4 \leq x_3 \leq 6$, $x_4 \geq 2$.

Úloha 5.6.5. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice
$$x_1 + x_2 + x_3 = 28$$
takých, že $3 \leq x_1 \leq 9$, $0 \leq x_2 \leq 8$, $7 \leq x_3 \leq 17$.

Úloha 5.6.6. Koľko existuje čísel menších než tisíc, pre ktoré je ciferný súčet rovný 14.

Kapitola 6

Stirlingove, Catalanove a iné čísla

6.1 Počet rozkladov – Stirlingove a Bellove čísla

{rozklad:SECT}

Na rôznych predmetoch sme sa videli, že relácie ekvivalencie a rozklady množín sú pomerne dôležité pojmy. Môžeme sa pýtať kombinatorickú otázku koľko existuje rôznych rozkladov (resp. relácií ekvivalencie) existuje na n-prvkovej množine. Uvidíme, že viaceré zaujímavé veci budeme vedieť povedať, aj ak budeme počítať počet rozkladov, ktoré majú práve k tried.

Pripomeňme, že pod rozkladom množiny X rozumieme to, že $X = \bigcup \mathcal{R}$, pričom:

- Každá množina $A \in \mathcal{R}$ je neprázdna.
- Tieto množiny sú po dvoch disjunktné, t.j. pre $A, B \in \mathcal{R}$ platí

$$A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Definícia 6.1.1. Počet rozkladov množiny $\{1, \dots, n\}$ označujeme B_n a voláme *Bellove číslo.*

Počet rozkladov množiny $\{1, \dots, n\}$, ktoré majú práve k-tried budeme označovať $\left\{ {n \atop k} \right\}$ alebo $S(n, k)$ a nazývať *Stirlingove číslo druhého druhu.*

Názov Stirlingove čísla *druhého druhu* napovedá, že existujú aj Strilingove čísla prvého druhu. Tie spomenieme neskôr.

Je zrejmé, že platí:

{rozklad:EQBELLSUM}

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{6.1}$$

{rozklad:POZNSURJ}

Poznámka 6.1.2. Vďaka tomu, že existuje prirodzený vzťah medzi surjektívnymi zobrazeniami a rozkladmi[1]

$$k! \left\{ {n \atop k} \right\} = \operatorname{Sur}(n, k).$$

Konkrétne pre každé surjektívne zobrazenie $f \colon A \to \{1, 2, \dots, k\}$ nám $\{f^{-1}((i)); i = 1, \dots, k\}$ dá nejaký rozklad množiny A na k množiny. A súčasne každý rozklad zodpovedá práve $k!$ surjekciám, lebo mám práve $k!$ možností ako priradiť jednotlivým triedam rozkladu prvky $1, 2, \dots, k$. (T.j. mám práve $k!$ možností ako môžem triedy rozkladu usporiadať.)

Dá sa na to pozrieť aj tak, že počet surjekcií je to isté ako počet *usporiadaných* rozkladov.

[1] Pozri aj `https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1730`.

6.1.1 Stirlingove čísla druhého druhu

ad:SSECTSTIR}

Nie je ťažké si uvedomiť, že platí

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \text{ a } \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$$

a súčasne $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ ak $k > n$.

Aj pre Stirlingove čísla máme

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\} \tag{6.2}$$ {rozklad:EQSTIRREKUR}

resp. $S(n+1,k) = kS(n,k) + S(n,k-1)$. (Jej odvodenie sme ponechali ako cvičenie – úloha 6.1.2.)

Pre malé n a k by sme vedeli vypísať hodnoty $\left\{ {n \atop k} \right\}$ aj skúšaním jednotlivch možností – keď máme k dispozícii rekurenciu (6.2), tak je to ešte o kúsok jednoduchšie, na základe prípadov $k = 1$ a $k = n$ vieme dopočítať ostatné hodnoty.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Na základe toho vieme vyjadriť aj hodnoty B_n pre malé n.

Cvičenia

Úloha 6.1.1. Čomu sa rovná $\left\{ {n \atop 0} \right\}$ v závislosti od n?

{rozkladcvic:ULOREK}

Úloha 6.1.2. Ukážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ platí vzťah (6.2), t.j.

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\}.$$

Úloha 6.1.3. Ukážte, že $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 = \frac{2^n-2}{2}$. (Pokúste sa aj o nejaký dôkaz priamo z definície, bez použitia rekurencie (6.2).)

6.2 Catalanove čísla

TODO počet uzátvorkovaní, počet binárnych stromov

TODO rekurencia

$C_0 = 1$

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \tag{6.3}$$ {catalan:EQREKUR}

$$C_n = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} \tag{6.4}$$ {catalan:EQBINOM}

Kapitola 7

Fibonacciho čísla

7.1 Definícia Fibonacciho a Lucasových čísel

V tejto časti sa budeme zaoberať *Fibonacciho postupnosťou.*

{fibdef:DEFFIB}

Definícia 7.1.1. Pre $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme *Fibonacciho číslo* F_n rekurentne, pomocou podmienok $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a

{fibdef:EQFIB}

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{7.1}$$

Je jasné, že uvedené počiatočné hodnoty spolu s rekurenciou (7.1) jednoznačne určujú F_n pre každé nezáporné celé číslo n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
F_n	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

Pri niektorých úvahách sa nám bude hodiť pracovať nie iba s Fibonacciho číslami, ale aj s inými postupnosťami reálnych (či komplexných) čísel, ktoré spĺňajú tú istú rekurenciu:

{fibdef:EQREK}

$$A_{n+2} = A_{n+1} + A_n \tag{7.2}$$

Samozrejme, aj tu platí, že ak si zvolíme hodnoty A_0 a A_1, tak sú jednoznačne určené aj všetky ďalšie hodnoty A_n pre $n \in \mathbb{N}_0$.

Lucasove čísla $L_0 = 2$, $L_1 = 1$

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

{fibdef:POZNNEG}

Poznámka 7.1.2. Niekedy sa nám môžem hodiť pracovať s F_n aj pre záporné indexy n. Je pomerne ľahké si rozmyslieť, že rovnosť (7.1) jednoznačne určuje hodnoty F_n aj pre všetky záporné celé čísla.

n	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
F_n	1	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34

Z uvedených hodnôt sa dá uhádnuť, že platí:

{fibdef:EQNEG}

$$F_{-n} = (-1)^n F_n. \tag{7.3}$$

Túto rovnosť pomerne ľahko dokážeme matematickou indukciou (úloha 7.1.1).

Cvičenia

fcvic:ULONEG}

Úloha 7.1.1. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $F_{-n} = (-1)^n F_n$.

7.2 Základné vlastnosti Fibonacciho čísel

Pozrieme sa na vyjadrenie F_n pomocou koreňov rovnice $x^2 - x - 1 = 0$, t.j. pomocou čísel:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Číslo φ je veľmi známe – nazýva sa *zlatý rez* a veľmi pravdepodobne ste sa s ním na rôznych miestach už stretli a ešte aj stretnete.

Keďže s týmito číslami budeme rôzne veci počítať, nie je zlé si uvedomiť, že platí:

$$\varphi + \psi = 1$$
$$\varphi - \psi = \sqrt{5}$$
$$\varphi \cdot \psi = -1$$

{fib:TVRBINET}

Tvrdenie 7.2.1. *Pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}_0$ platí:*

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \tag{7.4}$$ {fib:EQBINET}

Uvedené tvrdenie môžeme overiť matematickou indukciou. Neskôr sa pozrieme aj na to, že by sme na tento vzťah vedeli prísť aj bez toho, aby nám niekto prezradil vyjadrenie na pravej strane uvedenej rovnosti. Ak však máme zadanú rovnosť, ktorú sa snažíme dokazovať, tak dôkaz matematickou indukciou je priamočiary.

Dôkaz. 1° Pre $n = 0, 1$ máme

$$\frac{\varphi^0 - \psi^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0 = F_0$$
$$\frac{\varphi - \psi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = F_2$$
$$\frac{\varphi^2 - \psi^2}{\varphi - \psi} = \varphi + \psi = 1 = F_2$$

2° Ak predpokladáme platnosť rovnosti (7.4) pre $n+1$ a n, tak dostaneme

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &= \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\psi^{n+1} + \psi^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(\varphi+1)\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(\psi+1)\psi^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^2 \cdot \varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\psi^2 \cdot \psi^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

□

{fib:POZNBINETLK}

Poznámka 7.2.2. Keď sa pozrieme na toto odvodenie, tak vidíme, že sme v jednom kroku dostali rovnosti $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ a $\psi^{n+2} = \psi^{n+1} + \psi^n$. Teda geometrické postupnosti $A_n = \varphi^n$ a $B_n = \varphi^n$ tiež vyhovujú rekurencii (7.2).

Nie je ťažké si uvedomiť, že ak takejto rekurencii vyhovujú nejaké dve postupnosti, tak je splnená aj pre každú ich lineárnu kombináciu. Teda iný argument, ktorý sme mohli použiť na odvodenie (7.4) by mohol byť taký, že obe strany rovnosti vyhovujú počiatočným podmienkam $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a tiež rekurencie definujúcej Fibonacciho postupnosť – teda sa postupnosti na ľavej a pravej strane tejto rovnosti musia rovnať.

Všimnime si, že $0 < \psi < 1$, čiže $\lim\limits_{n\to\infty} \psi^n = 0$. Teda z (7.4) vidíme to, že hodnota F_n sa približne rovná $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, pričom chyba bude pre veľké n malá. Takisto ľahko dostaneme, že

{fib:EQLIM}

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{7.5}$$

t.j. podiel dvoch po sebe nasledujúcich Fibonacciho čísel sa v limite blíži k hodnote $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Teda Fibonacciho čísla súvisia so zlatým rezom.

Pri definícii Fibonacciho čísel sme spomenuli aj Lucasove čísla, ktoré boli určené rovnakou rekurenciou, ale s počiatočnými podmienkami $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Tvrdenie 7.2.3.

{fib:EQLUCAS}

$$L_n = \varphi^n + \psi^n \tag{7.6}$$

Dôkaz. 1° Pomerne ľahko skontrolujeme, že $\varphi^0 + \psi^0 = 2$ a $\varphi + \psi = 1$, t.j. tvrdenie platí pre $n = 0$ aj $n = 1$. (A samozrejme ak chcete, môžete vyskúšať aj niekoľko ďalších malých hodnôt n.)

2° TODO poznámka 7.2.2 □

7.3 Fibonacciho čísla a matice

{fibmat:SECT}

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

fibmat:EQMAT}

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \end{pmatrix} \tag{7.8}$$ {fibmat:EQMATREK}

$$A^2 = A + I$$

$$\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det(A) = t^2 - t - 1$$

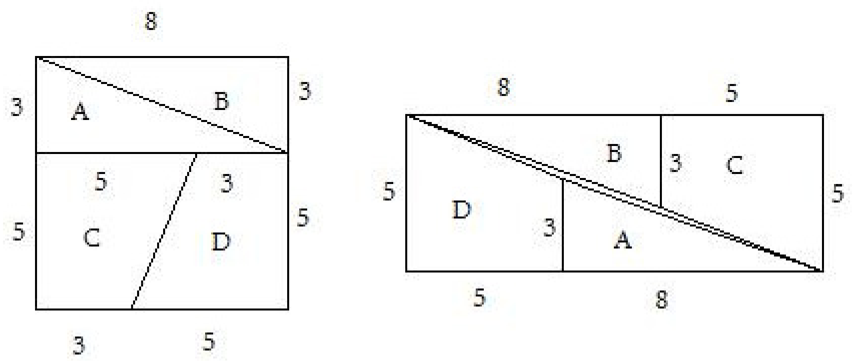
Tvrdenie 7.3.1 (Cassiniho identita)**.**

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{7.9}$$ {fib:EQCASSINI}

Dôkaz. Stačí aplikovať determinant na obe strany rovnosti (7.7).

$$\det \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

□

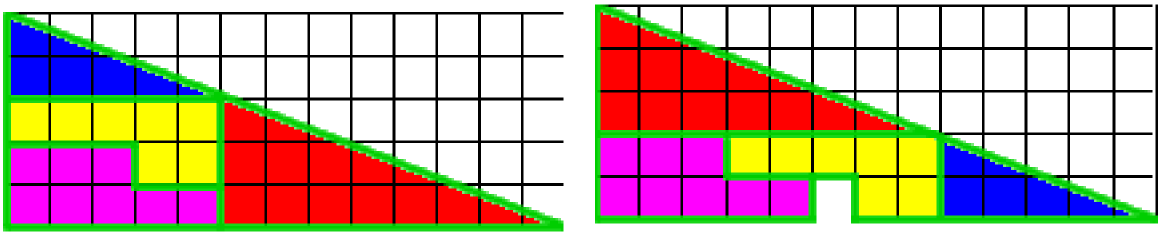


Obr. 7.1: Cassiniho identita.

Môžeme si všimnúť, že z (7.9) dostaneme

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}}.$$

O podiele F_{n+1}/F_n sme už v (7.5) ukázali, že konverguje k φ. Z tejto rovnosti navyše vidíme, že členy tejto postupnosti sa budú k φ blížiť takým spôsobom, že sa striedavo budú vyskytovať nad a pod limitnou hodnotou.



Obr. 7.2: Missing square puzzle

7.3.1 Diagonalizácia a Binetov vzorec

{fibmat:SSECT

Matica, pomocou ktorej sme vyjadrili n-té Fibonacciho číslo, má dve rôzne vlastné hodnoty φ a ψ. Teda vieme, že pre nejakú regulárnu maticu P musí platiť

$$A = P \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$A^n = P \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Máme teda rovnosť

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

V súčine matíc na pravej strane rovnosti sú všetky členy konštantné, jediné členy závisiace od n sú φ^n a ψ^n, ktoré sa v celom súčin vyskytujú iba raz. Už na základe tohto vyjadrenia teda vidíme, že pre nejaké vhodné koeficienty c_1, c_2 dostaneme

$$F_n = c_1\varphi^n + c_2\psi^n.$$

Ak nejako vieme nájsť $c_{1,2}$, dostaneme takto odvodenie Binetovej formuly (7.4).

Môžeme to urobiť napríklad tak, že ak táto rovnosť má platiť pre $n = 0, 1$, tak z rovností

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1\varphi + c_2\psi = 1$$

vieme vyjadriť $c_{1,2}$. Je to pomerne jednoduchá sústava – takže stačí urobiť pár úprav alebo môžeme použiť aj Cramerovo pravidlo a dostaneme

$$c_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \psi \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix}} = \frac{-1}{\psi - \varphi} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$c_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix}} = \frac{1}{\psi - \varphi} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Prípadne by sme mohli aj nájsť matice P, P^{-1} a vyjadriť všetky prvky súčinu pomocou nich – tým by sme našli aj vyjadrenie pre F_n.

7.3.2 Výpočet n-tého Fibonacciho čísla

SSECTVYPOCET}

$A^{45} =?$

$$\begin{aligned} A^{45} &= A \cdot A^{22} \\ A^{22} &= (A^{11})^2 \\ A^{11} &= A \cdot A^{10} \\ A^{10} &= (A^5)^2 \\ A^5 &= A \cdot A^4 \\ A^4 &= (A^2)^2 \end{aligned}$$

Vidíme teda, že z matice A vieme postupne dostať A^2, A^5, A^{11}, A^{22}, A^{45}, pričom v každom kroku sme urobili niektorý z výpočtov

$$\begin{aligned} A^{2k} &= (A^k)^2 \\ A^{2k+1} &= A \cdot (A^k)^2 \end{aligned}$$

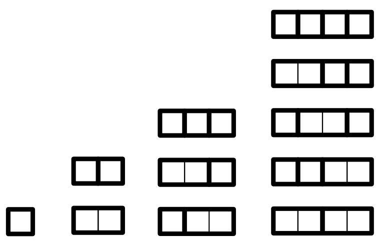
Takýmto postupom nám na výpočet A^n stačí rádovo $\lg n$ násobení matíc, čo je efektívnejšie, než ako keby sme postupne vypočítali všetky mocniny $A, A^2, A^3, \dots, A^n$.

7.4 Kombinatorická interpretácia Fibonacciho čísel

Chceme si rozmyslieť, ako súvisí s Fibonacciho číslami počítanie takýchto (navzájom súviacich) objektov.

- Počet dláždení mriežky rozmerov $1 \times n$ dlaždicami veľkostí 1×1 a 1×2.
- Počet vyjadrení čísla n ako súčtu jednotiek a dvojok (poznámka 7.4.1).
- Chceme prejsť n schodov tak, že každým krokom stúpame o jeden alebo o dva schody vyššie. Koľko je možností, ako sa to dá urobiť?

Povedzme, že máme mriežku rozmerov $1 \times n$, t.j. n štvorcov poukladaných v jednom riadku. Máme k dispozícii dlaždice veľkostí jeden štvorec a dva štvorce – pomocou nich chceme vydláždiť takúto jednoriadkovú mriežku. Ak to vyskúšame pre malé hodnoty čísla n, dostaneme možnosti znázornené na obrázkoch 7.3 a 7.4.

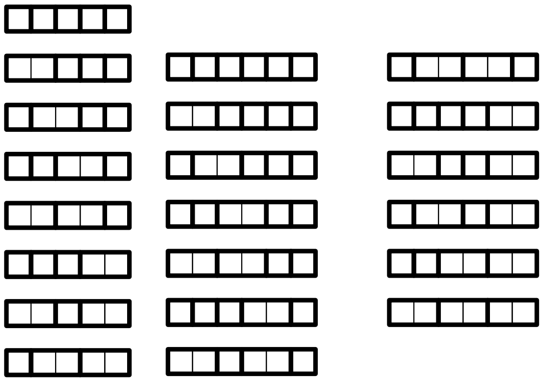


Obr. 7.3: Dláždenia mriežky $1 \times n$ pre $n = 1, 2, 3, 4$ {fibkom:FIGDLAZ1234}

{fibkomb:POZNSUCTY}

Poznámka 7.4.1. To isté môžeme samozrejme povedať aj tak, že počítame, koľkými spôsobmi vieme napísať dané číslo n v tvare

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$$



Obr. 7.4: Dláždenia mriežky $1 \times n$ pre $n = 5, 6$ {fibkom:FIGDL

pričom $x_i \in \{1, 2\}$. Na rozdiel od typu úlohy, aký sme riešili v časti 5.6, tu k nie je pevne zvolené ale môže byť ľubovoľné.

Opäť sa dá vyskúšať si to pre malé hodnoty n.

n	1	2	3	4	5	6
F_{n+1}	1	2	3	5	8	13
	1	$1+1$ 2	$1+1+1$ $2+1$ $1+2$	$1+1+1+1$ $2+1+1$ $1+2+1$ $1+1+2$ $2+2$	$1+1+1+1+1$ $2+1+1+1$ $1+2+1+1$ $1+1+2+1$ $2+2+1$ $1+1+1+2$ $2+1+2$ $1+2+2$	$1+1+1+1+1+1$ $2+1+1+1+1$ $1+2+1+1+1$ $1+1+2+1+1$ $2+2+1+1$ $1+1+1+2+1$ $2+1+2+1$ $1+2+2+1$ $1+1+1+1+2$ $2+1+1+2$ $1+2+1+2$ $1+1+2+2$ $2+2+2$

Z toho, čo sme si vyskúšali vyššie, už nie je ťažké prísť na vzťah medzi týmto problémom a Fibonacciho číslami.

{fibkomb:TVRDLAZD}

Tvrdenie 7.4.2. *Počet dláždení mriežky rozmerov $1 \times n$ pomocou dlaždíc rozmerov 1×1 a 1×2 je rovný F_{n+1}.*

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na n.

1° Pre $n = 0, 1, 2$ vyskúšame všetky možnosti.

2° Majme nejaké dláždenie mriežky rozmerov $1 \times (n + 1)$. Ako poslednú dlaždicu sme použili buď štvorec 1×1 alebo obdĺžnik 1×2. V prvom prípade začiatok mriežky má rozmery $1 \times n$, a teda takýchto dláždení bude podľa indukčného predpokladu F_{n+1}. V druhom prípade začiatok pozostávajúci z $1 \times (n-1)$ štvorcov môžeme vydláždiť F_n spôsobmi. Spolu dostaneme

$$F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$$

možností pre dláždenie celej mriežky. $\square$

7.5 Identity a sumy s Fibonacciho číslami

7.5.1 Niektoré vlastnosti Fibonacciho čísel

{fib:TVRKONV}

Tvrdenie 7.5.1 (Konvolučná vlastnosť). *Pre ľubovoľné* $m, n \in \mathbb{N}_0$ *platí*

{fib:EQKONV}

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \tag{7.10}$$

Dôkaz. Ak využijeme maticovú rovnosť (7.7), tak máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m+n}$$

$$\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

Ak sa pozrieme na to, čo v tomto súčine dostaneme v ľavom hornom rohu danej matice, tak máme:

$$F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n = F_{m+n}.$$

□

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \tag{7.11}$$ {fib:EQ2N}

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \tag{7.12}$$ {fib:EQ2N+1}

Tieto rovnosti sa tiež dajú využiť na pomerne efektívny výpočet n-tého Fibonacciho čísla – do istej miery podobným postupom, aký sme videli v časti 7.3.2. Súčasne je rovnosť (7.12) zaujímavá aj z toho dôvodu, že nám dáva jednoduché vyjadrenie pre súčet druhých mocnín dvoch po sebe nasledujúcich Fibonacciho čísel.

7.5.2 Sumy obsahujúce Fibonacciho čísla

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} F_n$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
S_n	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88

$$\sum_{k=0}^{n} F_n = F_{n+2} - 1 \tag{7.13}$$ {fibsum:EQSUM}

S tým, čo doteraz vieme, sa zdá, že do úvahy prichádzajú viaceré stratégie:

- Vedeli by sme to dokázať matematickou indukciou?
- Zjednoduší sa suma, ak použijeme Binetov vzorec?
- Dajú sa nejako využiť matice?
- Vedeli by sme ľavú aj pravú stranu nejako kombinatoricky interpretovať?

Poďme sa pozrieť na tieto možnosti. Viaceré z nich sú relatívne jednoduché – ale aj tak som sem napísal dôkazy. Jednak aby sme ich navzájom mohli porovnať – ktoré z nich sa podobajú, ktoré išli ľahšie či ťažšie. A azda je to užitočné aj z toho pohľadu, *Dôkaz matematickou indukciou.* TODO □

Nasledujúci dôkaz nie je výrazne odlišný od dôkazu matematickou indukciou – ak použijeme fakt, že $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$, tak sa v tejto sume veľa členov vykráti.

Dôkaz pomocou teleskopickej sumy.

$$\begin{aligned} S_n &= F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n \\ &= F_0 + (F_2 - F_0) + (F_3 - F_1) + (F_n - F_{n-2}) + (F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= F_{n+1} + F_n - F_1 = F_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

□

Kombinatorický dôkaz. Z tvrdenia 7.4.2 vieme, že F_{n+2} je počet dláždení mriežky rozmerov $1 \times (n+1)$ ak máme k dispozícii dlaždice veľkostí 1×1 a 1×2.

Ak sa pozeráme na to, kde sa vyskytla posledná dvojdlaždica, tak:

- Napravo od nej je dláženie už jednoznačne určené – môžeme používať iba dlaždice 1×1.
- Naľavo od nej máme všetky možné dláždenie kratšej mriežky; t.j. ak sme dvojdlaždicu položili za k-te políčko, tak máme všetky dláždenie mriežky $1 \times k$, ktorých je práve F_{k+1}.

Možné hodnoty pre k sú $0, 1, \ldots, n-1$. Navyše ešte musíme započítať jednu možnosť, ktorá neobsahuje žiadnu dvojdlaždicu. Dostaneme takto

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} F_k \end{aligned}$$

To je už v podstate dokazované rovnosť; iba tam je vynechaný sčítanec $F_0 = 0$. □

7.5.3 Fibonacciho čísla a binomické koeficienty

{EQFIBSUMBINOM}

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} \qquad (7.14)$$

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots$$

Túto sumu sme síce zapísali ako nekonečnú sumu – ale od istého miesta už platí $k > n-k$ a teda nenulových sčítancov máme iba konečne veľa. (Opäť využívame konvenciu, ktorú sme už viackrát spomenuli a občas sa aj ukázala ako užitočná – pozri poznámku 2.1.6.)

Pozrime sa na to, čo dostaneme pre niekoľko malých hodnôt n:

$$\binom{0}{0} = 1 = F_1$$
$$\binom{1}{0} = 1 = F_2$$
$$\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = F_3$$
$$\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3 = F_4$$
$$\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5 = F_5$$
$$\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8 = F_6$$
$$\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13 = F_7$$
$$\binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 1 + 6 + 10 + 4 = 21 = F_8$$

Tu sú znázornené vždy rovnakou farbou prvky Pascalovho trojuholníka, ktoré v súčte dávajú F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8. (T.j. tie isté súčty, ktoré sme uviedli vyššie.)

$$\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

Máme veľa možností, ako dokázať identitu (7.14).

Napríklad jedna možnosť je skúsiť využiť Pascalovu identitu a dokázať toto tvrdenie matematickou indukciou.

Dôkaz matematickou indukciou. □

Môžeme skúsiť tvrdenie dokazovať aj kombinatoricky – pozerať sa na dláždenia mriežky $1 \times n$. V tomto prípade ich rozdelíme podľa toho, koľko obsahujú domín tvaru 1×2.

Dôkaz. Pozerajme sa na dláždenia mriežky $1 \times n$ pomocou dlaždíc 1×1 a 1×2. V tvrdení 7.4.2 sme ukázali, že takýchto dláždení je F_{n+1}.

Ak sa v nich vyskytne k dlaždíc 1×2, tak nám zostáva použiť $n - 2k$ dlaždíc 1×1. Pozrime sa teda, koľko rôznych poradí sa dá vybrať. Máme za sebou usporiadaných spolu $n - k$ dlaždíc a chceme vybrať na ktoré pozície dáme k dvojdlaždíc. Máme teda $\binom{n-k}{k}$ možností.

Zistili sme teda, čomu sa rovná počet dláždení ak sme zafixovali počet dvojdlaždíc – rovnosť (7.14) dostaneme tak, že tieto hodnoty sčítame cez všetky možné hodnoty k. □

Cvičenia

Úloha 7.5.1. Ukážte, že platí:

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$$

Úloha 7.5.2. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

ibsumcvic:ULOBINKRATFIB}

Úloha 7.5.3. Ukážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k.$$

7.6 Fibonacciho čísla a deliteľnosť

Kapitola 8

Jednoduché rekurencie

8.1 Lineárne homogénne rekurencie s konštantnými koeficientami

Pre Fibonacciho postupnosť sme videli odvodenie Binetovho vzorca (7.4), ktorý nám vlastne hovorí, že Fibonacciho postupnosť vieme vyjadriť ako lineárnu kombináciu dvoch geometrických postupností. Našim cieľom je povedať si niečo o výsledkoch, ktoré tento fakt zovšeobecňujú na niektoré podobné postupnosti.

Budeme sa teda zaoberať postupnosťami, ktoré sú určené podmienkou tvaru

$$A_n = c_{k-1}A_{n-1} + c_{k-2}A_{n-2} + \cdots + c_1A_{n-k+1} + c_0A_{n-k} \tag{8.1}$$ {lhrek:EQREK}

kde $c_0, \ldots, c_k$ sú nejaké zadané konštanty a $(A_n)_{n=0}^{\infty}n$ je postupnosť určená uvedeným predpisom. Budeme predpokladať, že všetky konštanty c_k a aj členy postupnosti A_k sú komplexné čísla. Navyše predpokladáme, že $c_0 \neq 0$. (Touto podmienkou sme nič nestratili – ak by sme uvažovali rovnicu (8.1) s $c_0 = 0$, tak v nej máme posledný člen úplne zbytočne, keďže je nulový.)

Asi je pomerne ľahké vidieť to, že ak požadujeme, aby postupnosť $(A_n)_{n=0}^{\infty}n$ vyhovovala podmienke (8.1) a súčasne máme zadané hodnoty pre $A_0, \ldots, A_{k-1}$, tak už je celá postupnosť určená jednoznačne. Konkrétne vidíme, že zo zadaných hodnôt je jednoznačne určené čomu sa rovná A_k. Z týchto hodnôt už potom máme jednoznačne určené aj A_{k+1}, atď

$$\begin{aligned}
A_k &= c_{k-1}A_{k-1} + c_{k-2}A_{k-2} + \cdots + c_1A_1 + c_0A_0\\
A_{k+1} &= c_{k-1}A_k + c_{k-2}A_{k-1} + \cdots + c_1A_2 + c_0A_1\\
A_{k+2} &= c_{k-1}A_{k+1} + c_{k-2}A_k + \cdots + c_1A_3 + c_0A_2\\
A_{k+3} &= c_{k-1}A_{k+2} + c_{k-2}A_{k+1} + \cdots + c_1A_4 + c_0A_3\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Takéto rovnice voláme *lineárne homogénne rekurentné rovnice s konštantnými koeficientmi.* Na dešifrovanie tohto siahodlhého názvu:

1. Asi nás neprekvapí termín *rekurencia,* ktorý dobre poznáme ako predpis vyjadrujúci nejaký člen postupnosti pomocou predcháddzajúcich.
2. Sú to lineárne rovnice, t.j. nie sú tam členy ako napríklad $A_n = A_{n-1}^2 + A_{n-2}^2$ alebo $A_n = \sin A_{n-1}$.

3. Máme konštantné koeficienty, t.j. napríklad nevyhovovala by rovnica tvaru $A_n = nA_{n-1} + 2nA_{n-2}$.
4. Je to homogénna rovnica, t.j. dá sa prepísať na tvar $A_n - c_{k-1}A_{n-1} - c_{k-2}A_{n-2} - \cdots - c_1A_{n-k+1} + c_0A_{n-k} = 0$ – na rozdiel od rovnice tvaru $A_n - c_{k-1}A_{n-1} - c_{k-2}A_{n-2} - \cdots - c_1A_{n-k+1} + c_0A_{n-k} = f(n)$, kde na pravej strane by bola nejaká nenulová funkcia.

Ako o chvíľu uvidíme, rekurencia (8.1) úzko súvisí s koreňmi nasledujúcej rovnice:

Definícia 8.1.1. Rovnicu

{lhrek:EQCHAR}
$$x^k = c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \cdots + c_1x + c_0 \tag{8.2}$$

nazývame *charakteristická rovnica* rekurencie (8.1).

Jedna z vecí, ktoré by mohli naznačovať, že takáto rovnica môže nejako byť užitočná pri riešení rekurencií je to, že jej korene nám určujú kvocienty takých geometrických postupností, ktoré vyhovujú zadanej rekurencii – 8.1.1.

Našu rekurenciu a aj jej charakteristickú rovnicu môžeme samozrejme zapísať aj v tvare:

$$A_n - c_{k-1}A_{n-1} - c_{k-2}A_{n-2} - \cdots - c_1A_{n-k+1} - c_0A_{n-k} = 0$$
$$x^k - c_{k-1}x^{k-1} - c_{k-2}x^{k-2} - \cdots - c_1x - c_0 = 0$$

Budeme pri úvahách o takýchto rekurentných rovniciach často pracovať s riešeniami charakteristickej rovnice, t.j. s koreňmi polynómu na ľavej strane tejto rovnosti.

{lhrek:POZNNEG}

Poznámka 8.1.2. Ak máme zadané hodnoty $A_0, \dots, A_{k-1}$, tak spolu rovnica (8.1) jednoznačne určuje hodnoty A_n pre všetky $n \in \mathbb{Z}$, t.j. aj pre záporné celé čísla. Čiže ak sa nám to niekedy hodí, môžeme pracovať aj so zápornými indexami.

Podobný fakt sme už spomenuli v poznámke 7.1.2 pre Fibonacciho postupnosť.

Je užitočné si všimnúť, že lineárnou kombináciou postupností vyhovujúcich rekurencii tvaru (8.1) opäť dostaneme takú postupnosť. Teda platí:

{lhrek:TVRPPR}

Tvrdenie 8.1.3. *Postupnosti vyhovujúce rekurencii* (8.1) *tvoria podpriestor vektorového priestoru všetkých komplexných postupností* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Tento podpriestor má dimenziu* k.

Dôkaz. Ukázať, že ide o podpriestor je pomerne priamočiare – úloha 8.1.2. Označme tento podpriestorako S.

Zvoľme si takéto počiatočné hodnoty

$$\begin{array}{cccc}
A_0^{(0)} = 1 & A_0^{(1)} = 0 & \dots & A_0^{(k-1)} = 0 \\
A_1^{(0)} = 0 & A_1^{(1)} = 1 & \dots & A_1^{(k-1)} = 0 \\
A_2^{(0)} = 0 & A_2^{(1)} = 0 & \dots & A_2^{(k-1)} = 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A_{k-1}^{(0)} = 0 & A_{k-1}^{(1)} = 0 & \dots & A_{k-1}^{(k-1)} = 1
\end{array}$$

tak dostaneme k postupností $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)}$.

Tieto postupnosti patria do S a sú lineárne nezávislé.

Navyše každú postupnosť z S vieme zapísať ako lineárnu kombináciu týchto postupností.

$$A = A_0A^{(0)} + A_1A^{(1)} + \cdots + A_{k-1}A^{(k-1)}$$

(Stačí si uvedomiť, že postupnosti na ľavej aj pravej strane rovnosti vyhovujú rekurencie (8.1) a majú zhodných prvých k hodnôt.) □

{lhrek:VT1}
Veta 8.1.4. *Uvažujme rekurenciu* (8.1) *a predpokladajme navyše, že charakteristická rovnica* $x^k = c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \dots + c_1x + c_0$ *nemá násobné korene. Označme korene tejto rovnice v* $\mathbb{C}$ *ako* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Potom pre každé riešenie (A_n) *rekurencie* (8.1) *existujú koeficienty* $d_0, d_1, \dots, d_k$ *tak, že*

$$A_n = d_0\alpha_0^n + d_1\alpha_1^n + \dots + d_k\alpha_k^n.$$

Inak povedané, postupnosti $(\alpha_i^n)_{n=0}^\infty$ *pre* $i = 0, 1, \dots, k$ *tvoria bázu priestoru postupností vyhovujúcich rekurencii* (8.1).

V úlohe 8.1.1 je dokázané, že všetky postupnosti α_i^k sú skutočne riešenia rekurencie (8.1). Táto veta nám dáva informáciu, že pomocou nich vieme dostať aj všetky ostatné riešenia.

Situácia je o čosi komplikovanejšia v prípade násobných koreňov.

{lhrek:VTNASOBNE}
Veta 8.1.5. *Uvažujme rekurenciu* (8.1). *Nech* α *je* s*-násobný koreň je charakteristickej rovnice. Potom:*
a) Postupnosti $\alpha^n, n\alpha^n, n^2\alpha^n, \dots, n^{s-1}\alpha^n$ *vyhovujú rekurencii* (8.1).
b) Ak pre každý koreň zoberieme postupnosti takéhoto tvaru, tak spolu dostaneme bázu priestoru všetkých postupností spĺňajúcich (8.1).

Všimnime si, že sme dostali práve k postupností – počet koreňov *vrátane násobnosti* je totiž rovný k. (Tu využívame fakt, že pracujeme nad komplexnými číslami – a zo základnej vety algebry vieme, že každý nekonštantný polynóm má nad $\mathbb{C}$ toľko koreňov, koľko je jeho stupeň.)

{lhrek:POZNNASOBNEBINOM}
Poznámka 8.1.6. Môže byť užitočné uvedomiť si, že vieme zostaviť aj trochu inú bázu. Konkrétne postupnosti $\alpha^n, \binom{n}{1}\alpha^n, \binom{n}{2}\alpha^n, \dots, \binom{n}{s-1}\alpha^n$ generujú ten istý podpriestor, ako postupnosti uvedené v predošlej vete.

Na to si stačí uvedomiť, že vhodnou lineárnou kombináciou $1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{s-1}$ vieme dostať $1, n, n^2, \dots, n^{s-1}$ a obrátene. (Inak povedané, toto sú dve bázy pre priestor polynómov stupňa nanajvýš s v premennej n.)

To isté bude platiť aj ak zoberieme $\alpha^n, \binom{n}{1}\alpha^{n-1}, \binom{n}{2}\alpha^{n-2}, \dots, \binom{n}{s-1}\alpha^{n-s+1}$, keďže tie sa od predošlých postupností líšia iba vynásobením vhodnou konštantou. (Konkrétne ide o vynásobenie nejakou mocninou čísla α.)

Takýto veľmi špecifický tvar spomíname preto, že nám vyjde v časti 8.1.3 z Jordanovho tvaru matice súvisiacej s touto rekurenciou.

Naším cieľom je ukázať si vety 8.1.4 a 8.1.5 na konkrétnych príkladoch a pozrieť sa aj na to, či ich vieme nejako zdôvodniť.

Dôkaz týchto viet necháme na neskôr. Nejaké možnosti dôkazu si ukážeme v časti 8.1.2 pomocou zdôvodnenia lineárnej nezávislosti uvedených riešení a v časti 8.1.3 pomocou Jordanovho tvaru. (A dajú sa zdôvodniť aj inými spôsobmi.) Asi nie je priveľmi prekvapivé, že dôkazy budú jednoduchšie pre prípad, keď charakteristická rovnica nemá násobné korene – evidentne aj formulácia vety je v tomto prípade výrazne jednoduchšia.

Mohli by sme sa ale na tomto mieste aspoň zamyslieť nad tým, že postupnosti uvedené vo vete 8.1.5 skutočne vyhovujú našej rekurencii, t.j. overiť časť a) tejto vety. Neurobíme detailný dôkaz, ale aspoň naznačíme ako sa to dá odvodiť. Iný argument, založený na maticiach, je spomenutý v poznámke 8.1.8.

Ak α je s-násobný koreň polynómu $p(x) = x^k - c_{k-1}x^{k-1} - c_{k-2}x^{k-2} - \dots - c_1x - c_0$, tak je súčasne aj s-násobný koreň polynómu

$$x^{n-k}p(x) = x^n - c_{k-1}x^{n-1} - c_{k-2}x^{n-2} - \dots - c_1x^{n-k+1} - c_0x^{n-k}.$$

Všimnime si, že toto je presne podmienka, ktorá hovorí, že $A_n = \alpha^n$ vyhovuje rekurencii (8.1).

Súčasne vieme aj to, že α je $(s-1)$-násobným koreňom polynómu, ktorý dostaneme po zderivovaní – a opäť aj ľubovoľného jeho násobku. Je teda koreňom polynómov:

$$(x^{n-k}p(x))' = nx^{n-1} - c_{k-1}(n-1)x^{n-2} - c_{k-2}x^{n-2} - \cdots - c_1(n-k+1)x^{n-k} - c_0(n-k)x^{n-k-1}$$
$$x(x^{n-k}p(x))' = nx^{n} - c_{k-1}x^{n-1} - c_{k-2}(n-1)x^{n-2} - \cdots - c_1(n-k+1)x^{n-k+1} - c_0(n-k)x^{n-k}$$

To, že α je koreňom týchto polynómov, je presne to isté, ako že $A_n^{(1)} = n\alpha^n$ vyhovuje rekurencie (8.1).

Ak budeme podobnú úvahu opakovať – teda opäť tento polynóm zderivujeme a vhodne vynásobíme – tak dostaneme, že tej istej rekurencii vyhovujú aj ďalšie spomenuté riešenia až po $n^{s-1}\alpha^n$.

8.1.1 Príklady ilustrujúce hlavné vety

TODO

{lhrek:SSECTLN}

8.1.2 Lineárna nezávislosť

Vo vetách 8.1.4 a 8.1.5 sa tvrdí, že konkrétnych k postupností tvorí bázu priestoru riešení rekurencie 8.1. O tomto podpriestore už vieme, že má dimenziu k. Súčasne vieme aj to, že tieto postupnosti sú skutočne riešeniami. (Aj keď pre prípad násobných koreňov sme dôkaz iba naznačili.)

Stačí nám teda ukázať, že tieto postupnosti sú aj lineárne nezávislé. (Máme potom toľko lineárne nezávislých postupností (vektorov), koľko je dimenzia nášho priestoru – a teda tieto postupnosti tvoria bázu.)

Jednoduché korene

Jedna z možností, ako zdôvodniť v tomto prípade lineárnu nezávislosť riešení je využiť Vandermondovu maticu.

{lhrek:TVRNADERMREG}

Tvrdenie 8.1.7. *Nech F je ľubovoľné pole $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$ sú* navzájom rôzne *prvky poľa F. Potom matica*

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

je regulárna. Túto maticu nazývame Vandermondova matica.

Dôkaz. Predpokladajme, že by sme vedeli dostať nulový vektor ako lineárnu kombináciu riadkov uvedenej matice. Označme si koeficienty takejto lineárnej kombinácie ako $c_0, c_1, \dots, c_n$.

Potom na k-tej súradnici (pre $k = 0, 1, \dots, n$) máme

$$c_0 + c_1 a_k + c_2 a_k^2 + \cdots + c_n a_k^n = 0,$$

čo znamená, že a_k je koreňom polynómu $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$.

Vieme, že nenulový polynóm stupňa n môže mať nanajvýš n koreňov. Tu sme dostali $n+1$ koreňov $a_0, a_1, \dots, a_n$. Teda $p(x)$ je nulový polynóm, čiže všetky koeficienty sú nulové, t.j. $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. □

V súvislosti s vetou 8.1.4 je tento fakt užitočný preto, že z neho už vidíme lineárnu nezávislosť postupností $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_k^n$. Tvrdenie 8.1.7 nám totiž hovorí, že už aj ak sa pozeráme iba na prvých k členov týchto postupností, tak dostaneme lineárne nezávislé vektory.

TODO determinant Vandermondovej matice

$$\det\begin{pmatrix}1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n\end{pmatrix} = \prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

Pozri napríklad [Ko, Príklad 6.2.17(2) a úloha 6.2.20(2)].

Násobné korene

Jedna z možností ako dokázať lineárnu nezávislosť postupností z vety 8.1.5 je postupovať podobne ako v prípade jednoduchých koreňov. Opäť sa pozrieme iba na prvých k členov. Dostaneme tak maticu rozmerov $k \times k$, ktorá sa nazýva *zovšeobecnená Vandermondova matica.*

Aj pre takúto maticu sa dá ukázať, že je regulárna – ale dôkaz (a jeho zápis) by bol o čosi náročnejší.

8.1.3 Vyjadrenie pomocou matíc

{lhrek:SSECTMAT}

Nasledujúca maticová rovnosť je ekvivalentná s podmienkou (8.1):

$$\begin{pmatrix}A_n\\ A_{n-1}\\ \vdots\\ A_{n-k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{n-1}\\ A_{n-2}\\ \vdots\\ A_{n-k}\end{pmatrix} \tag{8.3}$$

{lhrek:EQREKMAT}

Je pomerne ľahké presvedčiť sa o tom, že (8.1) a (8.3) sú skutočne ekvivalentné. V prvom riadku maticovej rovnosti (8.3) máme priamo podmienku (8.1). Ostatné riadky majú tvar $A_i = A_i$ pre vhodné i.

Výhoda tohto vyjadrenia je, že sme dostali štvorcovú maticu

$$A = \begin{pmatrix}c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

takú, že jej mocniny súvisia s postupnosťou, ktorá nás zaujíma.

$$\begin{pmatrix}A_{n+k-1}\\ A_{n+k-2}\\ \vdots\\ A_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}A_{k-1}\\ A_{k-2}\\ \vdots\\ A_0\end{pmatrix} \tag{8.4}$$

{lhrek:EQREKMATMOCN}

Mocniny štvorcovej matice vieme vyjadriť pomerne jednoducho ak nájdeme jej vlastné hodnoty – prinajmenšom v prípade, že táto matica je diagonalizovateľná. (Ale aj pre všeobecné matice – s využitím Jordanovho tvaru.) Z rovnosti (8.4) vidíme, že A_n sa dá dostať ako lineárna kombinácia jednotlivých prvkov matice A^n. Pozrieme sa teda na to, ako vyzerá Jordanov tvar matice A a jeho mocniny – toto nám dáva jednu z možností ako odvodiť vety 8.1.4 a 8.1.5.

Vedeli by sme nájsť aj rôzne iné vyjadrenia pre (8.1) v tvare násobenia matíc. (Napríklad ak by sme zapísali vektory do riadku namiesto do stĺpca. Alebo zvolili iné poradie v akom do nášho vektora ukladáme prvky postupnosti. Každopádne vyjadrenia takého typu budú vyzerať tak, že v niektorom riadku alebo stĺpci máme koeficienty vystupujúce v predpise danej rekurencie a v ostatných sa vyskytne jedna jednotka a na zvyšných miestach nuly.)

Charakteristický polynóm

Chceli by sme teraz overiť, že charakteristický polynóm našej matice sa rovná

{lhrek:EQREKCHAR}
$$\chi_A(x) = x^k - c_{k-1}x^{k-1} - c_{k-2}x^{k-2} - \cdots - c_1 x - c_0. \tag{8.5}$$

Teda vlastne charakteristický polynóm sa zhoduje s charakteristickou rovnicou rekurencie (8.1).

Možno trochu pomôže, ak sa najprv pozrieme na malé rozmery.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - c_1 & -c_0 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x(x - c_1) - c_0 = x^2 - c_1 x - c_0$$

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x - c_2 & -c_1 & -c_0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} x - c_2 & -c_1 \\ -1 & x \end{vmatrix} - c_0 \begin{vmatrix} -1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= x(x^2 - c_2 x - c_1) - c_0 \\
&= x^3 - c_2 x^2 - c_1 x - c_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x - c_3 & -c_2 & -c_1 & -c_0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} x - c_3 & -c_2 & -c_1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} + c_0 \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= x(x^3 - c_3 x^2 - c_2 x - c_1) - c_0 \\
&= x^4 - c_3 x^3 - c_2 x^2 - c_1 x - c_0
\end{aligned}$$

Z malých prípadov, ktoré sme vypočítali vyššie, už azda vidno ako by sa dal urobiť dôkaz matematickou indukciou vzhľadom na rozmery matice.

Dôkaz rovnosti (8.5). TODO □

Rôzne korene – diagonalizácia

Pozrime sa najprv na prípad, že charakteristický polynóm $\chi_A(x)$ nemá násobné korene – t.j. na prípad zodpovedajúci vete 8.1.4.

V takomto prípade je naša matica A je podobná s diagonálnou, tak môžeme využiť veľmi podobné úvahy, aké sme urobili pre Fibonacciho postupnosť v časti 7.3.1.

Ak si $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ označíme korene charakteristického polynómu, tak matica A je podobná s diagonálnou maticou $D = \operatorname{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$, a teda existuje regulárna matica P tak, že platí:

$$\begin{aligned}
A &= PDP^{-1} \\
A^n &= PD^nP^{-1} \\
A^n &= P \begin{pmatrix} \alpha_0^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_k^n \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

Teda všetky prvky matice A^n sa dajú vyjadriť ako lineárne kombinácie čísel $\alpha_0^n, \alpha_1^n, \dots, \alpha_{k-1}^n, \alpha_k^n$. (Koeficienty vystupujúce v týchto lineárnych kombináciach závisia od matice P a P^{-1}.)

Na základe maticového vyjadrenia (8.4) máme potom aj vyjadrenie pre A_n v takomto tvare, t.j. dostaneme

$$A_n = d_0\alpha_0^n + d_1\alpha_1^n + \dots + d_{k-1}\alpha_{k-1}^n + d_k\alpha_k^n$$

pre nejaké konštanty $d_0, d_1, \dots, d_k$.

Násobné korene – Jordanov tvaru

Pozrieme sa na situáciu zodpovedajú vete 8.1.5, t.j. na to, čo sa stane, ak $\chi_A(x)$ má aj násobné korene. V prípade, že existujú násobné vlastné hodnoty, Jordanov tvar už nemusí mať diagonálny tvar, pre násobné vlastné hodnoty sa môžu vyskytnúť Jordanove bloky veľkosti väčšej než 1×1. V tomto prípade pracujeme s maticou pomerne špecifického tvaru a budeme dokonca vedieť dokázať, že pre každú vlastnú hodnotu existuje *jediný blok* – 8.1.9.

Stále však platí, že z $A = PJP^{-1}$ budeme mať vyjadrenie

$$A^n = PJ^nP^{-1}.$$

Situácia sa teda zmenila v tom, že teraz sa chceme pozerať na to, ako vyzerajú mocniny Jordanovho tvaru – čo je o čosi komplikovanejšie.

Samozrejme, keďže Jordanov tvar je blokovo diagonálna matica, pri výpočet J^n nám stačí vedieť, ako vyzerajú mocniny jednotlivých blokov.

$$J^n = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_t \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} J_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_t^n \end{pmatrix}$$

Súčasne z lineárnej algebry vieme, že pre Jordanov blok tvaru

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

má n-tá mocnina tvar

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & & \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \dots & & \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

T.j. na hlavnej diagonále sa všade nachádza λ^n a na ďalších diagonálach sú postupne

$$\binom{n}{1}\lambda^{n-1}, \binom{n}{2}\lambda^{n-2}, \dots, \binom{n}{j}\lambda^{n-j}, \dots.$$

(Takáto postupnosť skončí, keď sa už ďalšie mocniny nezmestia do veľkosti Jordanovho bloku, resp. ak sa zmestia všetky, tak za členom $\binom{n}{n}\lambda^{n-n} = 1$ už budú nasledovať nuly.)

Pre prípad, že to pomôže vyjasniť ako vyzerá všeobecný tvar takejto mocniny, sa môžeme pozrieť na niekoľko prvých mocnín bloku veľkosti 4×4.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \qquad J^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

Opäť z (8.4) potom vidíme, že A_n vieme zapísať ako lineárnu kombináciu vecí vyskytujúcich sa v J^n. Pre s-násobnú vlastnú hodnotu λ dostaneme blok veľkosti s, a teda sa tam vyskytnú λ^n, $\binom{n}{1}\lambda^{n-1}, \dots, \binom{n}{s-1}\lambda^{n-s+1}$.

Ako sme už spomenuli v poznámke 8.1.6, tieto riešenie dávajú bázu toho istého podpriestor ako $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{s-1}\lambda^n$. Teda takýmto spôsobom dostaneme skutočne vetu 8.1.5.

{lhrek:POZNMATSURIESENIA}

Poznámka 8.1.8. Vieme, že maticová rovnosť (8.4) je ekvivalentné s pôvodnou rekurenciou (8.1).

Teda postupnosti, ktoré sme dostali umocňovaním matice, sú to skutočne riešenia rekurencie (8.1). Tieto postupností majú tvar lineárnych kombinácií postupností $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{s-1}\lambda^n$.

Stačí si teda uvedomiť, že vhodnou voľbou počiatočných podmienok vieme dostať aj tieto postupnosti.

{lhrek:TVRJEDENBLOK}

Tvrdenie 8.1.9. *Matica*

$$A = \begin{pmatrix} c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má pre každú vlastnú hodnotu λ vo svojom Jordanovom tvare práve jeden blok.

Dôkaz. Stačí sa pozrieť na tvar matice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} c_{k-1} - \lambda & c_{k-2} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že posledných $n-1$ riadkov je lineárne nezávislých. Teda dostaneme, že $h(A-\lambda I) \geq n-1$, t.j. $n - h(A-\lambda I) = 1$. ☐

Cvičenia

{lhrekcvic:ULOGEOM}

Úloha 8.1.1. Ukážte, že geometrická postupnosť $A_n = \alpha^n$ vyhovuje rekurencii (8.1) práve vtedy, keď α je koreňom charakteristickej rovnice.

{lhrekcvic:ULOPPR}

Úloha 8.1.2. Ukážte, že postupnosti vyhovujúce rekurencii (8.1) tvoria podpriestor vektorového priestoru všetkých komplexných postupností $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Úloha 8.1.3. Nájdite vyjadrenie pre n-tý člen postupnosti určenej rekurenciou

$$A_n = 2A_{n-1} + A_{n-2}$$

pre $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, a počiatočnými podmienkami $A_0 = 0$, $A_1 = 1$.

Úloha 8.1.4. Nájdite vyjadrenie pre n-tý člen postupnosti určenej rekurenciou

$$A_n = 5A_{n-1} - 6A_{n-2}$$

pre $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, a počiatočnými podmienkami $A_0 = 0$, $A_1 = 1$.

{grafdef:DEFGRAF}

Kapitola 9

Grafy

9.1 Základné pojmy

Chceme sa zaoberať grafmi – t.j. niečím podobným ako na obrázku

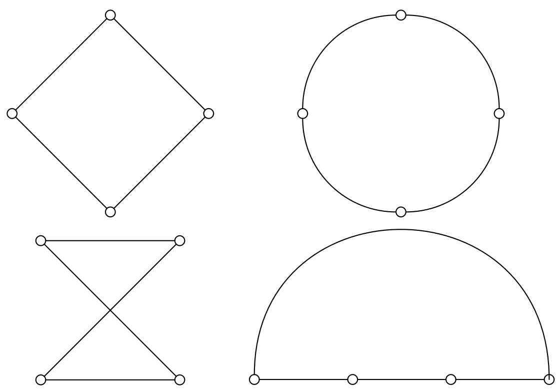
Tento pojem by sme mohli formalizovať napríklad takto:

Definícia 9.1.1. Nech V je konečná množina a E je nejaká množina dvojprvkových podmnožín množiny V. Potom dvojicu $G = (V, E)$ nazývame *graf.* Prvky množiny V voláme *vrcholy* a prvky množiny E voláme *hrany* grafu G.

Pre daný graf budeme označovať $V(G)$ jeho množinu vrcholov a $E(G)$ jeho množinu hrán.[1]

Pretože budeme často používať množinu všetkých dvojprkových podmnožín danej množiny V, hodí sa nám nejaké označenie pre túto množinu. Budeme v tomto texte používať označenie $V^{[2]}$, v niektorých textoch nájdete aj označenie $\binom{V}{2}$.

Azda aspoň trochu vidno, že táto formalizácia zodpovedá tomu, čo sme sa snažili znázorniť na našich obrázkoch; prvky množiny E naozaj zodpovedajú tomu, že sme vybrali, ktoré dvojice vrcholov sú spojené. Ten istý graf môžeme nakresliť rôznymi spôsobmi; môžeme rôzne poukladať vrcholy; môžeme si vybrať rôzne čiary predstavujúce hrany – jednoduchý príklad takéhoto typu je znázornený na obrázku 9.1.



{grafdef:OBRSTVORECROZNE}

Obr. 9.1: Ten istý graf nakreslený rôznymi spôsobmi

[1]Z angličtiny: vertices a edges.

Ak $e = \{u, v\} \in E$, tak hovorím, že vrchol u a hrana e sú susedné. Namiesto $\{u, v\} \in E$ budeme hrany stručnejšie zapisovať ako $uv \in E$. Ak pre dva vrcholy $u, v \in V$ platí $uv \in E$, tak hovoríme, že sú to *susedné vrcholy.* Ak $\{u, v\} \notin E$, voláme ich *nesusedné vrcholy.*

Užitočné sú aj niektoré ďalšie zovšeobecnenia. Napríklad môžeme mať medzi dvoma vrcholmi viacero hrán – dostaneme tzv. *multigrafy.* Alebo nás môže zaujímať situácia, kedy hrana má aj smer – t.j. o hrane vieme povedať nie iba to, ktoré dva vrcholy u a v spája, ale aj to, či ide z vrchola u do vrchola v alebo obrátene. Takto dostaneme *usmernené grafy.* Mohli by sme napríklad pripustiť aj hrany z nejakého vrchola do toho istého vrchola, tzv. *slučky.* Zatiaľ sa však zaoberajme iba jednoduchou situáciou, ktorú sme zaviedli v definícii 9.1.1; t.j. hrany nie sú orientované a nemáme povolené násobné hrany ani slučky.

Iný možný smer zovšeobecnenia je, že niektoré veci sa dajú rozumne zadefinovať aj v prípade, že V je nekonečná množina. My sa budeme venovať iba konečnému prípadu.

Definícia 9.1.2. Nech $G = (V, E)$ je graf a $u \in V$. Potom počet vrcholov, ktoré sú susedné s vrcholom u *stupeň vrchola.* Budeme ho označovať $\deg(v)$ alebo niekedy aj $\deg_G(v)$. (Najmä vtedy, ak bude treba zdôrazniť, s ktorým grafom pracujeme.) {grafdef:DEFSTUPEN}

Ekvivalentne môžeme stupeň vrchola zadefinovať ako počet susedných hrán.

Môžeme si všimnúť jednu pomerne jednoduchú vlastnosť, ktorú musia spĺňať stupne vrcholov v ľubovoľnom grafe – konkrétne to, že súčet stupňov sa rovná dvojnásobku počtu hrán..

Tvrdenie 9.1.3. *Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom platí* {grafdef:TVRHAND}

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Dôkaz. Dvoma spôsobmi spočítame počet dvojíc (v, e), kde $v \in e \in E$. (T.j. počet dvojíc vrchol a hrana, ktoré navzájom susedia.)

Pre každú hranu máme práve dva vrcholy. Pre každý vrchol máme práve $\deg(v)$ hrán. Teda obe strany rovnosti

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

vyjadrujú počet takýchto dvojíc. □

Z tvrdenia 9.1.3 vidíme, že súčet stupňov všetkých vrcholov grafu bude vždy párny.

Dôsledok 9.1.4. *V ľubovoľnom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa párny.* {grafdef:DOSHAND}

Môžeme sa pozrieť na to, koľko najviac hrán môže obsahovať graf na nejakej množine vrcholov.

Definícia 9.1.5. Ak V má n prvkov a E obsahuje všetky dvojprvkové podmnožiny množiny V, tak graf $G = (V, E)$ nazývame *kompletný graf* na n vrcholoch a označujeme K_n. {grafdef:DEFKN}

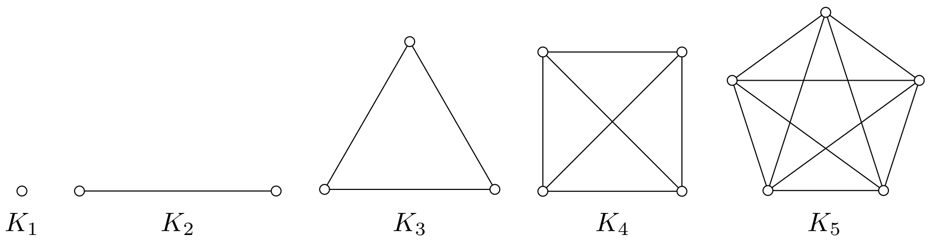
Kompletný graf K_n má n vrcholov a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ hrán.

Podobne ako pre iné štruktúry, aj pre grafy vieme povedať, kedy sú „v podstate rovnaké“.

Definícia 9.1.6. Nech $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú grafy a $f\colon V \to V'$ je zobrazenie. Zobrazenie f je izomorfizmus grafov ak f je bijekcia a pre ľubovoľné $u, v \in V$ platí {grafdef:DEFIZOM}

$$\{u, v\} \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Dva grafy G a G' sú *izomorfné*, ak existuje izomorfizmus medzi G a G'.



Obr. 9.2: Kompletné grafy K_1 až K_5 {grafdef:FIGK

{grafdef:DEFP

Definícia 9.1.7. Nech $G = (V, E)$ je graf. Graf $G' = (V', E')$ sa nazýva *podgraf* grafu G ak $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Ak množina E' obsahuje všetky hrany z E, ktorých koncové vrcholy ležia vo V', tak $G = (V', E')$ je *indukovaný podgraf* alebo tiež podgraf grafu G indukovaný množinou vrcholov V'. Stručnejšie:

$$E' = E \cap V^{[2]}.$$

Inými slovami: O podgrafe hovoríme, ak dostali graf G' takým spôsobom, že sme vybrali niektoré vrcholy $V' \subseteq V$ a niektoré spomedzi hrán medzi týmito vrcholmi. Ak sme zobrali *všetky* možné hrany grafu G, kde oba vrcholy ležia v zadanej podmnožine, tak hovoríme o indukovanom podgrafe.

Napríklad indukovaný podgraf kompletného grafu bude opäť kompletný graf. Ale každý graf na danej n-prvkovej množine vrcholov je podgraf grafu K_n.

Definícia 9.1.8. Nech $G = (V, E)$. Potom *komplement grafu* G je graf $G = (V, E')$ taký, že

$$E' = V^{[2]} \setminus E.$$

Inými slovami, máme tú istú množinu vrcholov, ale zobrali sme práve tie hrany, ktoré pôvodný graf neobsahoval.

defcvic:ULOPETERSENAUTO}

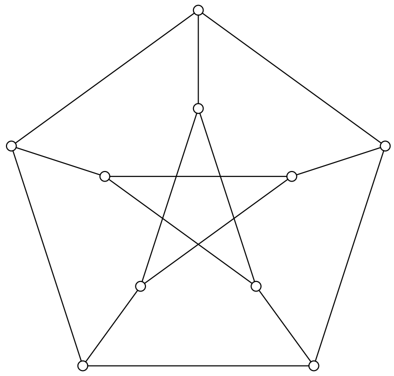
Cvičenia

Úloha 9.1.1. Dokážte: Pre ľubovoľné 2 vrcholy u, v Petersenovho grafu (obrázok 9.3) existuje automorfizmus f Petersenovho grafu taký, že $f(u) = v$. (Názov *automorfimus* znamená izomorfizmus grafu G s tým istým grafom G.)

cvic:ULOPETERSENMNOZINY}

Úloha 9.1.2. Definujme graf G nasledovne. Nech $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Množinu vrcholov V budú tvoriť všetky dvojprvkové podmnožiny množiny M. Dva vrcholy $A, B \subseteq M$ budú spojené hranou ak $A \cap B = \emptyset$. Dokážte, že je to vlastne Petersenov graf (teda že je izomorfný s Petersenovým grafom). Vedeli by ste použiť tento popis na dôkaz toho, že
a) pre ľubovoľné 2 vrcholy u a v existuje automorfimzus Petersenovho grafu taký, že $f(u) = v$,
b) pre ľubovoľné 2 dvojice susedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfimzus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$,
c) pre ľubovoľné 2 dvojice nesusedných vrcholov (u, v) a (u', v') existuje automorfimzus Petersenovho grafu také, že $f(u) = u'$ a $f(v) = v'$.

Úloha 9.1.3. Dokážte: V každom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú dva (rôzne) vrcholy, ktoré majú rovnaký stupeň.



{FIGPETERSEN} Obr. 9.3: Petersenov graf

9.2 Stromy

Vo viacerých situáciách sa nám bude hodiť pozerať sa na rôzne postupnosti susedných vrcholov.

Definícia 9.2.1. Nech $G = (V, E)$ je graf. Postupnosť $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ kde pre $v_0, \dots, v_k \in V$ a $e_1, \dots, e_k \in E$ nazývame *sled,* ak $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ pre $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Sled v ktorom sa neopakujú žiadne hrany nazývame *ťah.* Sled, v ktorom sa neopakujú žiadne vrcholy nazývame *cesta.*

V definícii sledu pripúšťame aj $k = 0$, t.j. sled môže pozostávať z jediného vrcholu. Pod *dĺžkou* sledu budeme rozumiť počet hrán, ktoré sa v ňom vyskytly.

Môžeme si uvedomiť, že sled je jednoznačne určený postupnosťou vrcholov, preto často budeme používať aj stručnejšie označenie $(v_0, v_1, \dots, v_k)$.

Ľahko si uvedomíme, že každá cesta je súčasne ťahom. (Ak sa neopakujú žiadne vrcholy, nemôžu opakovať sa opakovať ani hrany.)

Definícia 9.2.2. Ak pre sled $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ platí $v_0 = v_k$, t.j. prvý a posledný vrchol je rovnaký, nazývame ho *uzavretý sled.* Ak je uzavretý sled súčasne ťahom, voláme ho *uzavretý ťah.*

Uzavretý ťah taký, že s výnimkou prvého a posledného vrchola sa v ňom iné vrcholy už neopakujú nazývame *kružnica.*

Definícia 9.2.3. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *súvislý,* ak pre ľubovoľné vrcholy $u, v \in V$ existuje cesta z u do v.

Pojem súvislého grafu by sme mohli ekvivalentne definovať tak, že namiesto cesty by sme použili ťah alebo sled (úloha 9.2.1).

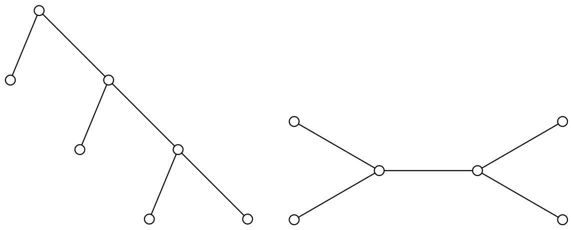
Každý graf sa dá rozdeliť na viacero súvislých grafov – tzv. komponentov súvislosti; pozri úlohy 9.2.2 a 9.2.3.

Dá sa tiež ukázať, že súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $n - 1$ hrán (úloha 9.2.5).

Definícia 9.2.4. Súvislý graf, ktorý neobsahuje nijakú kružnicu, sa nazýva *strom.*

Graf, ktorý neobsahuje kružnice sa zvykne nazývať aj *acyklický graf.* Teda definíciu stromu môžeme sformulovať aj tak, že je to súvislý acyklický graf.

Môžeme si všimnúť nasledujúcu vlastnosť, ktorá je užitočná pri dôkazoch rozličných tvrdení o stromoch.



Obr. 9.4: Príklady stromov

{stromy:TVRSTU

Tvrdenie 9.2.5. *Každý strom, ktorý má aspoň dva vrcholy, má aspoň dva vrcholy stupňa* 1.

Dôkaz. Nech T je strom $(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ je najdlhšia cesta v strome T. Táto cesta obsahuje aspoň dva vrcholy.

Koncové vrcholy našej cesty v_0 a v_k majú stupeň jedna; inak by sa táto cesta dala predĺžiť. (Sporom. Nech by v_k mal ešte jedného suseda s iného než v_{k-1}. Potom s sa nerovná žiadnemu z vrcholov $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$ – inak by sme boli schopní nájsť kružnicu. Potom $(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, s)$ je dlhšia casta.) □

Vidíme teda, že v strome máme vrchol stupňa 1 (až na dve pomerne triviálne výnimky). Vo viacerých dôkazoch sa nám bude hodiť výsledok o tom, ako stromy vznikajú pridávaním vrchola stupňa 1.

{stromy:TVRPRIDAJ}

Tvrdenie 9.2.6. *Nech $G = (V, E)$ je graf, ktorý obsahuje vrchol v stupňa* 1. *Graf G je strom práve vtedy, keď indukovaný podgraf na množine $V \setminus \{v\}$ je strom.*

Dôkaz. Zaoberáme sa grafom G a podgrafom $G - v$, ktorý vznikol vynechaním vrchola v a jedinej hrany, ktorá z neho vychádza. Označme ako v' jediného suseda vrcholu v.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretože G neobsahuje kružnice, ani podgraf $G - v$ neobsahuje kružnicu. Chceme ešte ukázať, že $G - v$ je súvislý. Ak $x, y \in V \setminus \{v\}$, tak existuje cesta z x do y v G. Súčasne táto cesta nemôže prechádzať cez v, pretože do tohto vrcholu sa dá vojsť a vyjsť z neho iba po jedinej hrane – takáto cesta by teda túto hranu obsahovala dvakrát.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pomerne ľahko zistíme, že ak $G - v$ je súvislý, tak aj graf G je súvislý. Ľubovoľné dva vrcholy z $V \setminus \{v\}$ vieme spojiť cestou. Ešte chceme ukázať existenciu cesty z ľubovoľného vrchola $x \in V$ do v. Ak $x = v$, tak môžeme zobrať cestu pozostávajúcu iba z vrcholu v. Ak $x \neq v$, tak existuje cesta z x do v', k tejto ceste nám stačí pridať jednu hranu. □

{stromy:TVRN-1}

Tvrdenie 9.2.7. *Nech T je strom, ktorý má n vrcholov. Potom T má práve $n - 1$ hrán.*

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na n.

1° Pre $n = 0, 1, 2$ môžeme vyskúšať všetky možné grafy na najviac dvoch vrcholoch.

2° Nech $n \geq 2$ a tvrdenie platí pre n. Nech T je strom, ktorý má $n + 1$ vrcholov.

Podľa tvrdenia 9.2.5 existuje nejaký vrchol v stupňa 1. Vynechaním tohto vrchola dostaneme graf $G - v$, ktorý je opäť stromom na základe tvrdenia 9.2.6. Podľa indukčného predpokladu má $G - v$ práve $n - 1$ hrán. Graf G dostaneme pridaním jedinej hrany, teda má práve n hrán. □

{stromy:TVRN-1JESTROM}

Tvrdenie 9.2.8. *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf ktorý má n vrcholov a $n - 1$ hrán. Potom G je strom.*

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na n.

1° Pre $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ tvrdenie platí. (Ľahko to skontrolujeme, ak sa pozrieme na všetky možné grafy na dvoch a menej vrcholoch.)

2° Prepokladajme, že tvrdenie platí pre $n \geq 2$. Chceme ukázať, že platí aj pre graf G s $n+1$ vrcholmi.

Najprv ukážme, že v G existuje vrchol stupňa 1. Z tvrdenia 9.1.3 vieme, že súčet stupňov je $2|E| = 2n - 2$. Ak by všetky vrcholy mali stupeň aspoň 2, tak by súčet stupňov bol $\geq 2n$. Teda existuje aspoň jeden vrchol stupňa menšieho než dva; nejaký taký vrchol si označme v. Tento vrchol nemôže mať stupeň 0, pretože potom by graf G nebol súvislý. Máme teda $\deg(v) = 1$.

Podľa tvrdenia 9.2.6 nám stačí ukázať, že vynechaním vrchola v dostaneme strom. To vyplýva z indukčného predpokladu □

Keďže každý súvislý graf má aspoň $n-1$ hrán (úloha 9.2.5), predchádzajúce dva výsledky vlastne hovoria, že stromy sú súvislé grafy s minimálnym možným počtom hrán. Vieme pridať aj viaceré ďalšie zaujímavé charakterizácie stromov, ktoré sú zosumarizované v nasledujúcej vete.

{stromy:VTEKV}

Veta 9.2.9. *Nech $G = (V, E)$ je graf, ktorý má n vrcholov. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:* {stromy:itSTROM}

- *(i) G je strom.* {stromy:itPOCETHRAN}
- *(ii) G je súvislý a má $n-1$ hrán.* {stromy:itJEDINA}
- *(iii) Pre ľubovoľné $x, y \in V$ existuje práve jedna cesta z x do y.* {stromy:itMINSUVIS}
- *(iv) Graf G je súvislý a súčasne odstránením ľubovoľnej hrany dostaneme nesúvislý graf.* {stromy:itMAXACYKL}
- *(v) Graf G je acyklický a pridaním ľubovoľnej novej hrany dostaneme kružnicu.*

Podmienku (*iv*) môžeme popísať aj tak, že G je minimálny súvislý graf – množina hrán sa nedá zmenšiť tak, aby graf stále zostal súvislý. Podmienka (*v*) hovorí to, že G je maximálny acyklický graf.

Dôkaz. Ekvivalenciu medzi (i) a (ii) sme už dokázali (tvrdenia 9.2.7 a 9.2.8). Aj ostatné dôkazy budú do istej miery podobné – často budeme používať indukciu a pri niektorých implikáciách sa nám bude hodiť tvrdenie 9.2.6.

Dôkaz, že každý strom spĺňa (*iv*) aj (*iii*) sme ponechali ako cvičenie – úlohy 9.2.6 a 9.2.7. (Opäť by malo byť užitočné tvrdenie 9.2.6.) Poďme sa pozrieť na obrátené implikácie – v oboch prípadoch zo zadanej podmienky vieme, že graf je súvislý; stačí nám teda ukázať neexistenciu kružníc.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Predpokladajme, že pre ľubovoľné x, y existuje jediná cesta z x do y. Chceme ukázať, že G neobsahuje kružnicu. Ak by graf G obsahoval kružnicu, tak pre ľubovoľné vrcholy ležiace na tejto kružnici by sme medzi nimi mali dve cesty – keďže po kružnici sa z x do y môžeme vybrať doma rôznymi smermi.

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$ Predpokladajme, že G je minimálny súvislý graf. Nech by v G existovala kružnica. Vynechaním niektorej hrany tejto kružnice neporušíme súvislosť. Ak sme totiž vynechali hranu $\{x, y\}$, tak z x do y sa stále vieme dostať po zostávajúcich hranách tejto kružnice. To znamená, že aj v novom grafe ležia x a y v tom istom komponente súvislosti.

Už nám zostáva iba ukázať ekvivalenciu medzi (*i*) a (*v*).

$\boxed{(i) \Rightarrow (v)}$ Nech G je strom a $\{x, y\} \notin E$. Pretože v G existuje cesta z x do y, po pridaní hrany $\{x, y\}$ dostaneme spolu s touto cestou kružnicu.

$\boxed{(v) \Rightarrow (i)}$ Nech G je maximálny acyklický graf. Chceme dokázať, že G je súvislý. Pre ľubovoľné $x, y \in V(G)$ buď sú tieto vrcholy spojené hranou alebo pridaním hrany $\{x, y\}$

vznikne kružnica. V druhom spomenutom prípade zostávajúce vrcholy kružnice tvoria cestu v G spájajúcu x a y. □

Cvičenia

{stromycvic:ULOSUVSLED}

Úloha 9.2.1. Nech $G = (V, E)$ je graf a $u, v \in V$. Ukážte, že ak existuje sled začínajúci v u a končiaci vo v, tak existuje aj cesta z u do v. (Hint: Skúste sa pozrieť na najkratší sled z u do v.)

{stromycvic:ULOSUVEKV}

Úloha 9.2.2. Nech $G = (V, E)$ je graf. Pre ľubovoľné dva vrcholy u, v grafu G definujme reláciu $\sim$ na množine V tak, že $u \sim v$ práve vtedy, keď existuje cesta z u do v. Ukážte, že táto relácia je relácia ekvivalencie na množine V. Triedy ekvivalencie $\sim$ nazývame *komponenty súvislosti* grafu G.

{stromycvic:ULOSUVKOMP}

Úloha 9.2.3. Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf a C je niektorý jeho komponent súvislosti. Ukážte, že indukovaný podgraf na množine C je súvislý.

Úloha 9.2.4. Ukážte, že pre každý vrchol u grafu G je jeho komponent súvislosti rovný najväčšiemu indukovanému podgrafu obsahujúcemu vrchol u.

{stromy:ULOSUVISN-1}

Úloha 9.2.5. Dokážte: Súvislý graf na n vrcholoch má aspoň $n - 1$ hrán.

stromy:ULOSTROMMINSUVIS}

Úloha 9.2.6. Ukážte, že každý strom je minimálny súvislý graf, t.j. vynechaním ľubovoľného vrcholu vznikne nesúvislý graf. (Hint: Dá sa použiť tvrdenie 9.2.6.)

{stromy:ULOSTROMJEDINA}

Úloha 9.2.7. Ukážte, že ak T je strom, tak pre ľubovoľné dva vrcholy $x, y \in V(T)$ existuje práve jedna cesta z x do y. (Hint: Dá sa použiť tvrdenie 9.2.6.)

Úloha 9.2.8. Dokážte: Graf $G = (V, E)$ je súvislý práve vtedy, keď pre každý rozklad množiny vrcholov $V = V_1 \cup V_2$ na dve neprázdne disjunktné množiny existuje hrana spájajúca nejaký vrchol z V_1 s nejakým vrcholom z V_2.

Úloha 9.2.9. [Kn, Cvičenie 9.4] Dokážte, že ak graf na n vrcholoch má aspoň $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak je súvislý. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.

Úloha 9.2.10. Nech P_1 a P_2 sú dve cesty maximálnej možnej dĺžky v súvislom grafe G. Dokážte, že P_1 a P_2 majú spoločný vrchol. Musia mať spoločnú hranu?

vic:ULOPETERSENKRUZNICE}

Úloha 9.2.11. Nájdite v Petersenovom grafe kružnice dĺžok 5, 6, 8 a 9. Ukážte, že v tomto grafe nie sú žiadne kružnice dĺžok 3 ani 4.

9.3 Planárne grafy

9.3.1 Eulerova formula

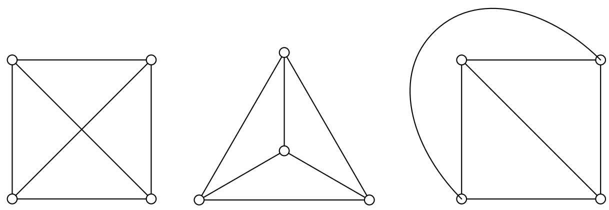
V tejto časti sa chceme pozrieť na také grafy, ktoré sa dajú „pekne“ nakresliť v rovine.

Definícia 9.3.1. Graf sa nazýva *planárny graf* alebo *rovinný graf* ak je možné nakresliť graf v rovine takým spôsobom, že sa v tomto nakreslení nijaké dve hrany nepretínajú.

Takáto definícia nie je veľmi presná, pretože sme poriadne nepovedali, čo rozumieme pod termínom *rovinné nakreslenie* grafu. Ale aspoň individuálne by mohla byť jasná predstava, že chceme nejako každému vrcholu v grafe priradiť nejaký bod rovine a hranám priradiť nejaké krivky v rovine. O nich máme aspoň nejakú intuitívnu predstavu – a formálne by sme krivky definovali ako spojité funkcie z uzavretého intervalu $\langle 0, 1\rangle$ do $\mathbb{R}^2$. Na tomto mieste sa však uspokojíme s intuitívnou predstavou o krivkách a kreslení grafov.

anar:PRIKLK4}

Príklad 9.3.2. Kompletný graf K_4 je planárny – aj keď nie každý spôsob nakreslenia bude taký, že sa hrany nebudú pretínať. Je asi do istej miery vec vkusu, ktorý spôsob nakreslenia grafu K_4 z obrázku 9.5 sa zdá byť najprirodzenejší, resp. ktorý by sme vyskúšali nakresliť ako prvý. Ale určite po chvíli skúšania by sme našli nejaké rovinné nakreslenia – na uvedenom obrázku sú dve rovinné nakreslenia, prvý spôsob je taký, že sa v ňom hrany pretínajú.

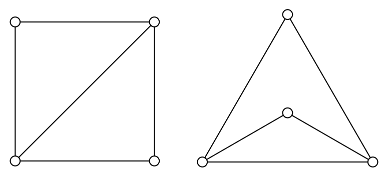


Obr. 9.5: Graf K_4 nakreslený rôznymi spôsobmi {planar:FIGK4}

Na geometrickú intuíciu sa ale budeme spoliehať najmä pri pojme steny, o ktorom chceme niečo teraz povedať. Máme teda graf nejako nakreslený v rovine, tým sú teda určené nejaké body zodpovedajúce vrcholom a nejaké vrcholy zodpovedajúce hranám. Takéto nakreslenie rozdelí rovinu na niekoľko oblastí medzi ktorými sa nedá prechádzať bez toho, aby sme prešli cez niektorú hranu. Tieto oblasti budeme nazývať *stenami.*

Hoci takéto niečo vyzerá intuitívne pomerne zrejme, dokázať takéto tvrdenie formálne nie je vôbec úplne jednoduché. Dokázať už takú vec, že uzavretá krivka rozdelí rovinu práve na dve časti je dosť obtiažne (Jordanova veta o krivkách). Na tomto mieste sa uspokojme s tým, že máme aspoň nejakú intuitívnu predstavu o tom, ako vyzerajú oblasti, na ktoré nakreslenie nejakého grafu rozdelilo rovinu.

Možno sa oplatí ešte explicitne upozorniť na to, že medzi steny rátame aj vonkajšiu stenu. Ten istý graf môžem nakresliť viacerými spôsobmi, v závislosti od toho aké nakreslenie si vyberieme môže vonkajšia stena pozostávať z úplne iných hrán – pozri obrázok 9.6.



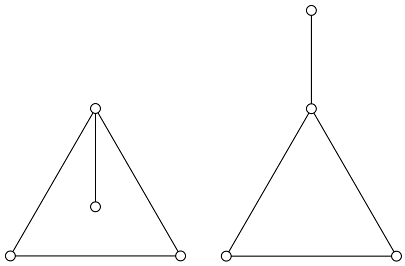
Obr. 9.6: Počet hrán vonkajšej steny sa môže pri rôznych nakresleniach líšiť {planar:FIGVONK}

Takisto sa oplatí uvedomiť si, že sa môže stať aj to, že jednou stenou je vonkajšia stena. Ak sa obmedzíme na súvislé grafy, tak toto nastane práve pre stromy – akonáhle máme totiž v grafe nejakú kružnicu, tak tá rozdelí rovinu na dve disjunktné oblasti. (Tu vlastne využívame Jordanovu vetu o krivkách.)

Spomeňme na tomto mieste, že hrana môže ležať aj na hranici iba jednej steny. Napríklad takéto niečo dostaneme pre každý strom – tam mám iba jednu stenu. Iný príklad je na obrázku 9.7. Ak postupne prechádzam celú hranicu niektorej steny, tak takúto hranu prejdem dvakrát.

{planar:POZNGULA}

Poznámka 9.3.3. *stereografická projekcia*



Obr. 9.7: Hrana susediaca s jedinou stenou {planar:FIGDV

{planar:VTEUL

Veta 9.3.4 (Eulerova formula)**.** *Ak pre nejaký súvislý rovinný graf označuje v počet vrcholov, h počet hrán a s počet stien, pričom $v \geq 1$, tak platí*

$$v - h + s = 2. \tag{9.1}$$ {planar:EQEUL

Dôkaz. Indukciou vzhľadom na počet hrán.

1° Ak $h = 0$, tak máme jediný vrchol a jedinú stenu. Teda skutočne platí $v - h + s = 2$.

2° Nech $h \geq 1$ a tvrdenie platí pre grafy s menej než h hranami.

Ak G neobsahuje kružnicu, tak je to strom a má práve $h + 1$ vrcholov (tvrdenie 9.2.7). Súčasne v tomto prípade máme iba jednu (vonkajšiu) stenu. Teda v takomto prípade dokazované tvrdenie platí.

Zoberme si teraz prípad, že G obsahuje nejakú kružnicu a e nech je niektorá hrana patriaca tejto kružnici. Graf $G - e$, ktorý vznikne vynechaním tejto hrany, je tiež súvislý. Teda podľa indukčného predpokladu preň Eulerova formula. Ako sa zmenil počet stien vynechaním hrany?

Hrana e leží v dvoch rôznych stenách pôvodného grafu. (Tu vlastne využívame to, že krivka zodpovedajúca kružnici rozdelila rovinu práve na dve časti − Jordanovu vetu o krivkách.) A z týchto dvoch stien vynechaním hrany e vznikla jedna stena. Aplikovaním indukčného predpokladu na menší graf dostaneme

$$v - (h - 1) + (s - 1) = 2,$$

z čoho vyplýva aj dokazovaná rovnosť $v - h + s = 2$. □

Ľahko sa dá zistiť, že uvedená rovnosť neplatí pre nesúvislé grafy – pre takéto grafy by sme dostali rovnosť v tvare

{planar:EQEULERNESUV}
$$v - h + s = 1 + c, \tag{9.2}$$

kde c označuje počet komponentov súvislosti (úloha 9.3.4).

To, že nejaký graf je planárny vieme ukázať napríklad tak, že sa nám podarí nájsť jeho rovinné nakreslenie. (Samozrejme, úloha nájsť vhodné nakreslenie nemusí byť jednoduchá úloha - najmä pre väčšie grafy.) Otázka je, ako dokázať, že nejaký graf nie je planárny – t.j. že neexistuje nijaké rovinné nakreslenie. Môže byť užitočné, ak budeme poznať aspoň nejaké nutné podmienky na to, aby nejaký graf bol súvislý.

{planar:VTNEROV}

Veta 9.3.5. *Ak G je planárny graf, ktorý má v vrcholov a h hrán, pričom $v \geq 3$. Potom platí*

{planar:EQNEROV}
$$h \leq 3v - 6. \tag{9.3}$$

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že graf je súvislý. Poďme sa pozrieť na počet usporiadaných dvojíc hrana a stene, ktoré navzájom susedia.

Každá hrana patrí práve dvom stenám (prípadne dvakrát tej istej stene), teda takýchto dvojíc je práve $2h$.

Ak $v \geq 3$, tak každá stena je ohraničená aspoň troma hranami – úloha 9.3.5. (Opäť tu započítavame hranu dvakrát ak sa vyskytne na hranici niektorej steny viac ako raz.) To znamená, že takýchto dvojíc je aspoň $3s$.

Dostaneme teda:

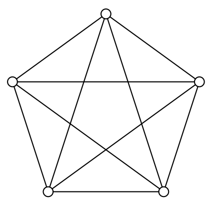
$$\begin{aligned} 3s &\leq 2h \\ 3(2+h-v) &\leq 2h \\ h &\leq 3v-6 \end{aligned}$$

Zatiaľ sme dokázali uvedenú nerovnosť pre súvislé grafy. To, že uvedená nerovnosť platí aj pre nesúvislé grafy ponecháme ako cvičenie – úloha 9.3.6. □

{planar:DOSK5}

Dôsledok 9.3.6. *Graf K_5 nie je planárny.*

Dôkaz. Stačí spočítať, že pre graf K_5 máme $v = 5$, $h = \binom{5}{2} = 10$. Počet hrán je väčší než $3v - 6 = 9$, čiže graf nesplňa nutnú podmienku (9.3). □



Obr. 9.8: Graf K_5 nie je planárny

{planar:TVRSTUP5}

Tvrdenie 9.3.7. *Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupňa ≤ 5.*

Dôkaz. Predpokladajme, že všetky vrcholy by mali stupeň väčší než päť. Z tvrdenia 9.1.3 vieme, že

$$\sum_{i=1}^{v} d_i = 2h,$$

kde d_i označuje stupeň i-teho vrchola. Z $d_i \geq 6$ teda dostaneme

$$6v \leq 2h.$$

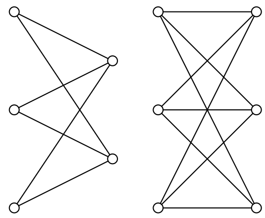
Ak porovnáme túto nerovnosť s (9.3), tak z $h \leq 3v - 6$ dostaneme

$$6v \leq 2h \leq 6v - 12,$$

čo je spor. □

{planar:DEFKMN}

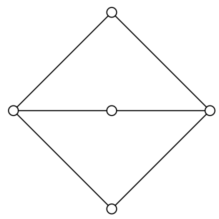
Definícia 9.3.8. *Kompletný bipartitný graf $K_{m,n}$* je graf, v ktorom množina vrcholov pozostáva z dvoch disjunktných častí $V = V_1 \cup V_2$, takých, že množina hrán je $E = \{\{u, v\}; u \in V_1, v \in V_2\}$, pričom $|V_1| = m$.



Obr. 9.9: Grafy $K_{3,2}$ a $K_{3,3}$ {planar:FIGK33

Stručne: Máme m-prvkovú množinu V_1 a n-prvkovú množinu V_2 a každý vrchol z V_1 je spojený s každým vrcholom z V_2. (A žiadne iné hrany už v tomto grafe nie sú.)

Napríklad každý graf $K_{n,2}$ je planárny – na obrázku 9.10 je rovinné nakreslenie grafu $K_{3,2}$.



Obr. 9.10: Graf $K_{3,2}$ je planárny {planar:FIGK3

{planar:VTNEROVKRUZ4}

Veta 9.3.9. *Nech G je planárny graf, ktorý má v vrcholov a h hrán, pričom $v \geq 3$. Ak G neobsahuje kružnicu dĺžky 3, tak platí*

{planar:EQNEROVKRUZ4}

$$h \leq 2v - 4 \tag{9.4}$$

Dôkaz. Dôkaz je podobný na dôkaz vety 9.3.5. Aj tu urobíme to, že sa obmedzíme na súvislé grafy (a prípad, keď G je nesúvislý, necháme na rozmyslenie).

Argument je takmer rovnaký – treba si ale uvedomiť, že teraz hranica každej oblasti musí obsahovať aspoň štyri hrany.

$$\begin{gathered} 4s \leq 2h \\ 4(2 + h - v) \leq 2h \\ 2h \leq 4v - 8 \\ h \leq 2v - 4 \end{gathered}$$

□

{planar:DOSK33}

Dôsledok 9.3.10. *Graf $K_{3,3}$ nie je planárny.*

Dôkaz. Gram $K_{3,3}$ neobsahuje žiadnu kružnicu dĺžky 4.Súčasne máme $v = 6$, $h = 9$. Dostaneme $2v - 4 = 8$, čiže graf nevyhovuje podmienke (9.4). □

Poznámka 9.3.11. Môžeme si všimnúť, že graf $K_{3,3}$ vyhovuje podmienke $h \leq 3v - 6$ z vety 9.3.5. Táto podmienka je teda nutná, nie však postačujúca.

Podobným spôsobom ako vety 9.3.5 a 9.3.9 môžeme nájsť ohraničenie na počet hrán vyjadrené pomocou dĺžok kružníc – keďže tie nám niečo hovoria o počte hrán ohraničujúcich steny.

Definícia 9.3.12. Nech $G = (V, E)$ je graf. *Obvod grafu*[2] je dĺžka najkratšej kružnice v grafe. (Ak graf neobsahuje žiadne kružnice, tak obvod položíme rovný ∞.)

{planar:VTNEROVGIRTH}

Veta 9.3.13. *Nech G je graf obsahujúci aspoň jednu kružnicu, ktorý má v vrcholov, h hrán a jeho obvod je g. Ak graf G je planárny, tak platí*

$$h \leq \frac{g(v-2)}{g-2}.$$

Pozri napríklad [J, Theorem 1.5.3].

9.3.2 $K_{3,3}$ a K_5 ako zakázané podgrafy

Spomenieme bez dôkazu – a dokonca aj bez presnej formulácie – to, že neplanárne grafy sú presne tie grafy, v ktorých sa nejakým spôsobom „skrývajú“ $K_{3,3}$ a K_5. Takéto výsledky sú Kuratowského veta a Wagnerova veta. Oba výsledky charakterizujú planárne grafy pomocou zakázaných podgrafov resp. zakázaných minorov. V jednom prípade ide o to, že sa dá nájsť podgraf z ktorého vytvoríme $K_{3,3}$ alebo K_5 takým spôsobom, že niektoré po sebe idúce hrany môžeme pospájať do jednej hrany. V druhom prípade sa $K_{3,3}$ a K_5 nesmú vyskytnúť ako minory grafu, t.j. nedajú sa dostať tak, že niektoré susedné vrcholy zlúčime do jedného vrcholu, vynechávame hrany, vynechávame izolované vrcholy.

Dôkazy týchto viet sú pomerne náročné – ale keďže ide o veľmi známe výsledky, zdalo sa rozumné ich pri tejto téme aspoň spomenúť. (Takisto tu neuvádzame ani presnú formuláciu týchto viet a potrebných pojmov – ako napríklad pojem minor grafu.) Viac sa dá nájsť napríklad v [D, Theorem 4.4.6]. Dôkaz Kuratowského vety je napríklad aj v [H, Theorem 11.13], [CH, Theorem 5.14].

Ukážme si na tomto mieste aspoň jeden príklad ukazujúci, ako sa takýto typ úvah dá použiť pri dôkaze, že nejaký graf nie je planárny.

{planar:PRIKLPETERSEN}

Príklad 9.3.14. Pozrime sa na známy *Petersenov graf.* Ukážeme, že ak by Petersenov graf bol planárny, tak by sme z jeho rovinného nakreslenia dalo vyrobiť nakreslenie grafu $K_{3,3}$. Na obrázku 9.11 máme vľavo nakreslený Petersenov graf, pričom sú farebne vyznačené dve trojice vrcholov – tieto dve trojice na konci použijeme pre graf $K_{3,3}$. V prvom kroku sme graf zmenili tak, že sme vynechali dve vodorovné hrany – tým sme určite nemohli pokaziť planaritu.

Všimnime si, že takto v grafe vznikli štyri vrcholy stupňa 2. Dvojice hrán prechádzajúce vrcholmi stupňa 2 sme nahradili jednou hranou a vrcholy stupňa 2 sme vynechali – takto sme dostali tretí obrázok. (Alebo obrátene z obrázka vpravo dostaneme stredný obrázok tak, niektoré hrany prerušíme tým, že ich rozdelíme na dve hrany a medzi nimi bude vrchol stupňa 2.) Opäť si nie je ťažké uvedomiť, že ani takéto zmeny neovplyvnia, či je graf planárny.

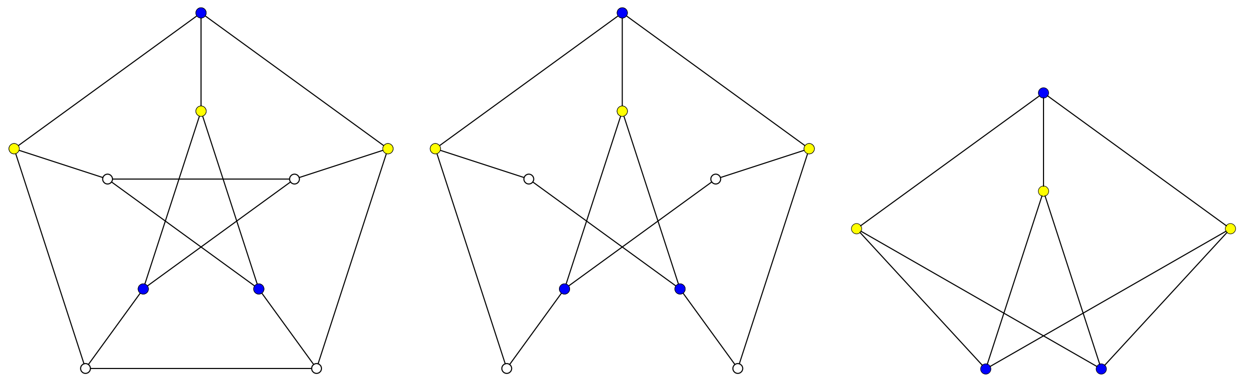
Ale na poslednom obrázku je každý z trojice modrých vrcholov spojený s každým žltým vrcholom – teda je to graf $K_{3,3}$.

Teda z planarity Petersenovho grafu by vyplývala planarita grafu $K_{3,3}$. V dôsledku 9.3.10 sme už ukázali, že $K_{3,3}$ nie je planárny, čiže ani Petersenov graf nemôže byť planárny.

Súčasne tento postup slúži ako ilustrácia Kuratowského vety – Petersenov graf má podgraf, ktorý sa dá z grafu $K_{3,3}$ dostať iba pridávaním vcholov stupňa 2 do niektorých hrán.

To, že Petersenov graf nie je planárny, by sme vedeli odvodiť aj inak – úloha 9.3.14.

[2] V angličtine *girth*.



Obr. 9.11: Petersenov graf nie je planárny

{planar:FIGPET

9.3.3 Pravidelné rovinné grafy a platónske telesá

Chceme sa teraz pozrieť na dva navzájom súvisiace problémy – my sa pozrieme na to, čo vieme na ne povedať ak sa na túto úlohu pozráme cez grafy:

- Chceli by sme nájsť súvislé planárne grafy s rovinnými nakresleniami takými, že každý vrchol má rovnaký stupeň a každá stena je ohraničená rovnakým počtom hrán.
- Chceli by sme nájsť tzv. *platónske telesá,* t.j. konvexné pravidelné mnohosteny. Teda také telesá, ako sp napríklad štvorsten alebo kocka – kde všetky steny sú rovnaké a sú to pravidelné n-uholníky.

TODO ako to súvisí s telesami

Pozrime sa na tento problém teda cez planárne grafy.

Každý vrchol má rovnaký stupeň, označme ho d. Potom platí

$$2h = vd.$$

Podobne, každá stena nech má m hrán. Opäť z toho, že každá hrana patrí práve 2 stenám, dostaneme

$$2h = ms.$$

Potom z Eulerovej formuly máme

$$\begin{aligned} 2 = v - h + s = \frac{2h}{d} - h + \frac{2h}{m} \\ \frac{2}{h} + 1 = \frac{2}{d} + \frac{2}{m} \\ \frac{1}{h} + \frac{1}{2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Chceme nájsť všetky čísla, ktoré vyhovujú tejto rovnici. Má platiť

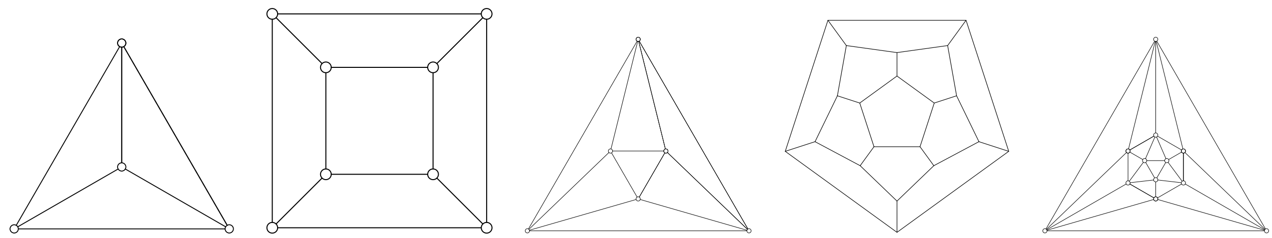
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2},$$

pričom súčasne vieme, že $d \geq 3$ a $m \geq 3$.

Dostávame tieto možnosti:

d	m	h	v	s
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
3	5	30	20	12
4	3	12	6	8
5	3	30	12	20

Dostali sme grafy na obrázku 9.12. Zodpovedajúce telesá sú pravidelný štvorsten, kocka, pravidelný osemsten, pravidelný dvanásťsten a pravidelný dvadsaťsten.



Obr. 9.12: Grafy zodpovedajúce platónskym telesám {planar:FIGPLATGRAFY}

Cvičenia

{planarcvic:ULOPODGRAF}

Úloha 9.3.1. Ukážte, že ak G je planárny graf, tak aj každý jeho podgraf je planárny.

{planarcvic:ULOMALE}

Úloha 9.3.2. Ukážte, že pre $n \leq 4$ sú všetky grafy na n vrcholoch planárne.

Úloha 9.3.3. Pre ktoré m, n je graf $K_{m,n}$ planárny?

{planarcvic:ULONESUVISLY

Úloha 9.3.4. Ukážte, že graf G (nie nutne súvislý) platí rovnosť $v - h + s = 1 + c$, kde c označuje počet komponentov súvislosti.

{planarcvic:ULOTRISTENY}

Úloha 9.3.5. Zdôvodnite, že ak graf má aspoň tri vrcholy, tak s každou stenou susedia aspoň tri hrany. (Môže sa tu hodiť Jordanova veta o krivkách, ktorú sme spomenuli bez dôkazu.)

{planarcvic:ULONEROVCG}

Úloha 9.3.6. Ukážte, že pre ľubovoľné (nie nutne súvislý) graf G platí nerovnosť $h \leq 3v - 6$, t.j. nerovnosť (9.3). Dá sa odvodiť o čosi silnejšia nerovnosť, v ktorej bude vystupovať aj počet komponentov súvislosti grafu G?

Úloha 9.3.7. Ukážte, že ak pre rovinný graf platí rovnosť $h = 3v - 6$, tak pri ľubovoľnom rovinnom nakreslení je každá stena ohraničená kružnicou dĺžky 3. (T.j. každá stena je trojuholník)

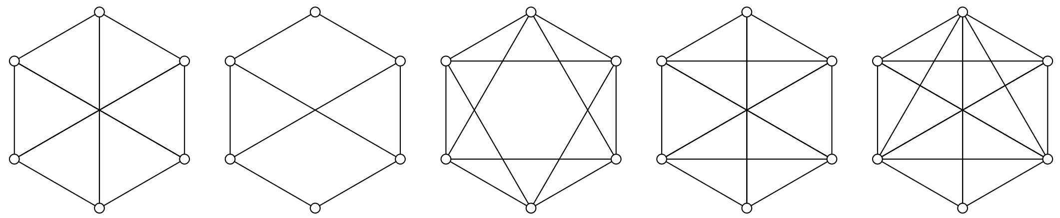
Úloha 9.3.8. Ukážte, že pre ľubovoľné $v \geq 3$ existuje rovinný graf, ktorý má práve $3v - 6$ hrán.

{planarcvic:ULOKOMPLEMEN

Úloha 9.3.9. Nech G je graf na n vrcholoch a $n \geq 11$. Dokážte, že potom graf G alebo jeho komplement nie je planárny.

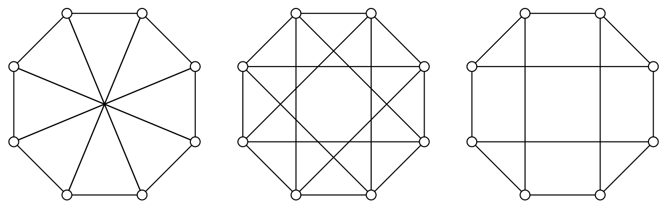
{planarcvi:ULOGRAFY6}

Úloha 9.3.10. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



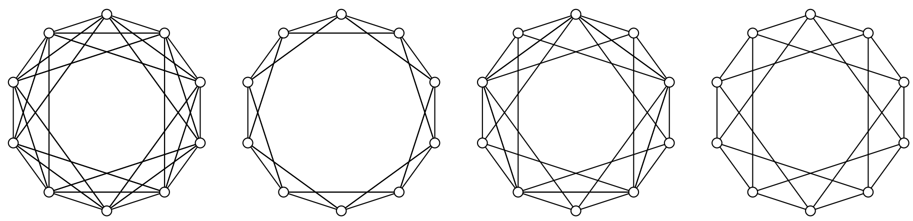
{planarcvi:ULOGRAFY8}

Úloha 9.3.11. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné? Zdôvodnite!



{planarcvi:ULOGRAFY10}

Úloha 9.3.12. Ktoré z nasledujúcich grafov sú rovinné?



Úloha 9.3.13. Ukážte, že: a) Po vynechaní ľubovoľnej hrany z K_5 dostaneme planárny graf. b) Po vynechaní ľubovoľnej hrany z $K_{3,3}$ dostaneme planárny graf.

{planarcvic:ULOPETERSEN}

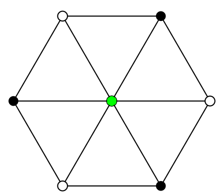
Úloha 9.3.14. Ukážte, že Petersenov graf nie je planárny, pomocou vety 9.3.13.

9.4 Farbenie grafov

Pozrieme sa v tejto časti na niektoré fakty súvisiace s farbením vrcholov grafu.

Definícia 9.4.1. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva *k-farbiteľný,* ak existuje ofarbenie vrcholov grafu k farbami také, že žiadne dva susedné vrcholy nemajú tú istú farbu.

2-farbiteľný graf sa tiež nazýva *bipartitný graf* alebo *párny graf.*

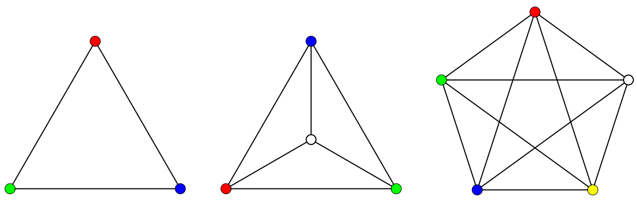


Obr. 9.13: Príklad grafu ofarbeného troma farbami

Farbenie vrcholov grafu by sme mohli popísať aj ako zobrazenie $V \to \{1, 2, \dots, k\}$. (Pričom máme podmienku, že pre ak $\{u, v\} \in E$ tak $f(u) \neq f(v)$.)

Iný možný pohľad je, že vrcholy máme rozdelené na k-disjunktných množín $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, pričom sú zakázané hrany v rámci každej z uvedených množín. (Nesmú byť spojené dva vrcholy z niektorej množiny V_i.)

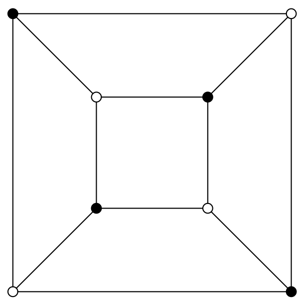
Definícia 9.4.2. Najmenšie k, pre ktoré je graf G k-farbiteľný, sa nazýva *chromatické číslo* grafu G a označuje sa $\chi(G)$.



Obr. 9.14: $\chi(K_n) = n$ {farb:FIGKN}

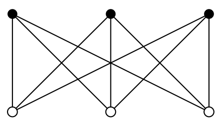
9.4.1 Bipartitné grafy

Pozrime sa najprv na grafy, ktoré sa dajú zafarbiť dvoma farbami.



Obr. 9.15: Kocka ako príklad bipartitného grafu {farb:FIGKOCKABI}

Vlastne to znamená, že máme rozklad množiny vrcholov $V = V_1 \cup V_2$ na dve disjunktné množiny, pričom hrany sú iba nejakým vrcholom v V_1 a nejakým vrcholom z V_2.



Obr. 9.16: Graf $K_{3,3}$ je bipartitný {farb:FIGK33BI}

{farb:VTBIPODDCYCLES}

Veta 9.4.3. *Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom G je párny graf práve vtedy, keď G neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky.*

Dôkaz. Jedna z implikácií by mala byť pomerne zrejmá – úloha 9.4.1.

Sústreďme sa na dôkaz, že ak graf neobsahuje kružnicu nepárnej dĺžky, tak sa dá ofarbiť dvoma farbami.

Stačí toto tvrdenie overiť pre súvislé grafy. (Každý komponent súvislosti môžeme ofarbiť zvlášť.)

Predpokladajme teda, že graf $G = (V, E)$ je súvislý. Vyberme si jeden konkrétny vrchol v_0 a pre každé $u \in V$ sa pozrieme na jeho vzdialenosť od v_0. T.j. na číslo $d(v_0, u)$, ktoré vyjadruje dĺžku najkratšej cesty z u do v_0.

Ofarbime teraz vrcholy podľa parity vzdialenosti od v_0. T.j. vrcholy, kde vzdialenosť od v_0 je párna ofarbíme jednou farbou a druhou farbou tie vrcholy, pre ktoré je vzdialenosť od v_0 nepárna.

Ukážeme, že neexistuje hrana medzi dvoma vrcholmi rovnakej farby.

Nech by existovala hrana medzi vrcholmi v a w takými, že $d(v_0, v)$ aj $d(v_0, w)$ majú rovnakú paritu. Nech $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k = v)$ a $(v_0, w_1, w_2, \ldots, w_l = w)$ sú cesty najkratšej možnej dĺžky z v_0 do v resp. do w. Nech x je posledný vrchol, ktorý patrí do oboch týchto ciest.

Pretože sme použili najkratšie cesty, aj úseky $(v_0, v_1, \ldots, v_i = x)$ a $(v_0, w_1, \ldots, w_j = x)$ sú najkratšie cesty z v_0 do x. Znamená to teda, že tieto úseky majú rovnakú dĺžku s.

Teda dĺžky zostávajúcich úsekov $(x = v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k = v)$ a $(x = w_j, w_{j+1}, \ldots, w_l = w)$ majú rovnakú paritu. Navyše tieto dve cesty už nemajú spoločné vrcholy (a teda ani hrany). Keby existovala hrana medzi v a w tak by sme s jej použitím z týchto dvoch úsekov vedeli dostať kružnicu nepárnej dĺžky. (Kružnica pozostáva z tejto hrany a z dvoch úsekov dĺžky s, spolu má $2s + 1$ hrán.) $\square$

9.4.2 Veta o piatich farbách

Pozrieme sa trochu na otázku, čo sa dá povedať o farbení planárnych grafov. Najprv ukážeme, že každý planárny graf sa dá ofarbiť piatimi farbami. Podobný výsledok platí aj pre štyri farby, ale dôkaz je výrazne náročnejší – pozri poznámku 9.4.5.

[BM, Theorem 9.11], [Kn, Veta 10.5], [MN, Proposition 6.5]

{farb:VT5CT}

Veta 9.4.4. *Každý rovinný graf je* 5*-farbiteľný.*

Dôkaz. Označme počet vrcholov grafu ako n, dôkaz urobíme indukciou vzhľadom na n.

1° Tvrdenie triviálne platí pre $n \leq 5$.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky grafy, ktoré majú menej než n vrcholov.

Ak G je planárny graf, tak G obsahuje vrchol stupňa nanajvýš 5 (veta 9.3.7). Vyberme si nejaký takýto vrchol a označme ho v.

Po vynechaní vrchola v dostaneme graf $G - v$, ktorý sa podľa indukčného predpokladu dá ofarbiť nanajvýš piatimi farbami.

Ak vrchol v má menej než piatich susedov, tak môžeme toto ofarbenie doplniť na ofarbenie celého grafu G tak, že vyberieme farbu nepoužitú pri žiadnom zo susedných vrcholov.

Budeme teda predpokladať, že $deg(v) = 5$. Zoberme si nejaké rovinné nakreslenie grafu G a susedné vrcholy si označíme ako $v_1, v_2, \ldots, v_5$ v smere pohybu hodinových ručičiek.

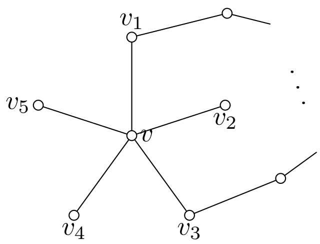
Ak v ofarbení grafu $G - v$ boli pre týchto susedov použité iba štyri farby, tak vieme doplniť ofarbenie tak, že pre v vyberieme niektorú ďalšiu farbu. Predpokladajme teda, že máme ofarbenie, v ktorom vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_5$ majú rôzne farby. Našim cieľom bude ukázať, že ofarbenie graf $G - v$ sa dá zmeniť tak, že to stále

Pozrime sa napríklad na vrcholy v_1 a v_3. Označme si $G_{1,3}$ graf pozostávajúci iba z tých vrcholov, ktoré sú ofarbené iba farbami vrcholov v_1 a v_3.

Uvedomme si, že ak v niektorom komponente súvislosti grafu $G_{1,3}$ navzájom vymeníme tieto dve farby, tak opäť dostaneme prípustné ofarbenie grafu $G - v$.

Ak sú teda dva vrcholy v rôznych komponentoch súvislosti, tak môžeme povymieňať farby v komponente vrchola v_3 tak, aby mal rovnakú farbu ako v_1. Dosiahneme tým, že susedia vrchola v majú iba štyri rôzne farby – a teda sa dá nejako doplniť ofarbenie na celý graf G.

Ak existuje nejaká cesta z v_1 do v_3 v grafe $G_{1,3}$, tak uzavretá krivka určená touto cestou spolu s vrcholom v oddelí vrcholy v_2 a v_4 (obrázok 9.17). Cesta zodpovedajúca tejto krivke obsahuje iba tieto dve farby.



Obr. 9.17: Ilustrácia dôkazu vety o piatich farbách {farb:FIG5CT}

Skúsme teraz zopakovať podobnú úvahu pre vrcholy v_2 a v_4. Pozeráme sa graf $G_{2,4}$ pozostávajúci iba z takýchto vrcholov. Akákoľvek cesta z v_2 do v_4 v grafe $G - v$ však musí niekde preťať uzavretú krivku, ktorú sme dostali pre vrcholy v_1 a v_3. Teda bude obsahovať aj inú farbu, nemôže celá ležať v $G_{2,4}$.

Teda komponenty vrcholov v_2 a v_4 v grafe $G_{2,4}$ sú rôzne. To znamená, že komponent súvislosti vrcholu v_2 môžeme prefarbiť tak, aby v_2 a v_4 mali rovnakú farbu. A teda sa potom takéto ofarbenie dá doplniť na ofarbenie grafu G nanajvýš piatimi farbami. □

{farb:POZN4CT}

Poznámka 9.4.5. V skutočnosti platí silnejší výsledok – každý rovinný graf sa dá ofarbiť pomocou *štyroch* farieb. Dôkaz je však výrazne náročnejší.

Cvičenia

{farbcvic:ULOBIPKRUZ}

Úloha 9.4.1. Ukážte, že bipartitný graf nemôže obsahovať kružnicu nepárnej dĺžky.

Úloha 9.4.2. Nájdite ofarbenie vrcholov Petersenovho grafu troma farbami. Dá sa Petersenov graf ofrabiť dvoma farbami?

9.5 Eulerovské grafy

Pozrieme sa na otázku, či sa po danom grafe dá prejsť takým spôsobom, že po každej hrane prejdeme práve raz.

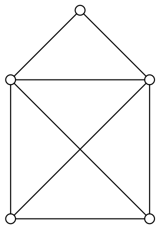
TODO mosty

Definícia 9.5.1. *Eulerovský ťah* je taký ťah v grafe G, ktorý obsahuje všetky hrany grafu. *Uzavretý eulerovský ťah* je taký uzavretý ťah, ktorý obsahuje všetky hrany grafu.

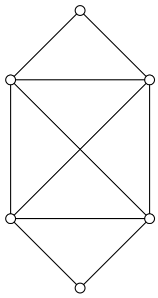
Očividne, existencia uzavretého ťahu implikuje, že graf G je súvislý.

{euler:VTEULER}

Veta 9.5.2. *Súvislý graf G má uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď všetky vrcholy grafu majú párny stupeň.*



Obr. 9.18: Príklad grafu s eulerovským ťahom {euler:FIGKDOM



Obr. 9.19: Príklad grafu s uzavretým eulerovským ťahom {euler:FIGKDOM

Dôkaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Úloha 9.5.1.
$\boxed{\Leftarrow}$ TODO □

Takýto výsledok platí aj pre grafy s násobnými hranami a slučkami (úloha 9.5.2).
Vieme dokázať podobnú vetu aj pre eulerovské ťahy, ktoré nie sú uzavreté.

{euler:VTEULER2}

Veta 9.5.3. *Nech G je súvislý graf a u, v sú dva* rôzne *vrcholy grafu G. V grafe G existuje eulerovský ťah začínajúci v u a končiaci vo v práve vtedy, keď vrcholy u, v majú nepárny stupeň a všetky ostatné vrcholy majú párny stupeň.*

Cvičenia

ulercvic:ULOPARNYSTUPEN}

Úloha 9.5.1. Ukážte, že ak graf G má uzavretý eulerovský ťah, tak všetky vrcholy majú párny stupeň.

{eulercvic:ULONASOBNE}

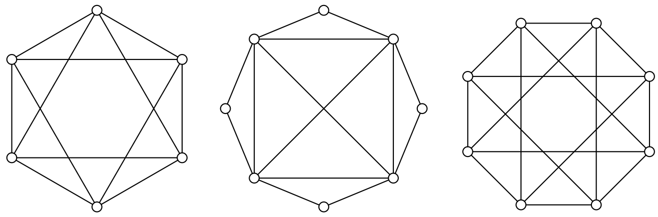
Úloha 9.5.2. Ukážte, že veta 9.5.2 platí aj ak v grafoch povolíme slučky a násobné hrany.

{eulercvic:ULOPLATON}

Úloha 9.5.3. Ktoré z grafov zodpovedajúcich platónskym telesám majú uzavretý eulerovský ťah (obr. 9.12)?

Úloha 9.5.4. Pre ktoré n má graf K_n uzavretý eulerovský ťah?
Pre ktoré m, n má graf $K_{m,n}$ uzavretý eulerovský ťah?

Úloha 9.5.5. Majú dané grafy (uzavretý) eulerovský ťah? Ak áno, nájdite aspoň jeden.



9.6 Hamiltonovské grafy

Pre daný graf sa môžeme pýtať, či sa dá prejsť po jeho vrcholoch tak, aby sme prešli všetky vrcholy.

Definícia 9.6.1. *Hamiltonovská kružnica* je kružnica, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu. *Hamiltonovská cesta* je cesta, ktorá obsahuje všetky vrcholy grafu.

Graf, ktorý má hamiltonovskú kružnicu, voláme *hamiltonovský.*

Problém zistiť, či pre daný graf existuje hamiltonovská cesta a nájsť ju, je z algoritmického hľadiska náročný problém. Ale pre malé grafy budeme vedieť hamiltonovské cesty (hamiltonovské kružnice) nájsť aj skúšaním. A takisto vieme povedať niektoré jednoduché nutné alebo postačujúce podmienky na to, aby existovala hamiltonovská kružnica.

9.6.1 Nutné podmienky

Tvrdenie 9.6.2. *Ak graf $G = (V, E)$ má hamiltonovskú kružnicu, tak pre každú neprázdnu podmnožinu $S \subseteq V$ platí*

$$c(G - S) \leq |S|,$$

t.j. graf, ktorý vznikne z G vynechaním k vrcholov má nanajvýš k komponentov súvislosti.

Dôkaz. □

Tvrdenie 9.6.3. *Nech $G = (V, E)$ je párny graf a $V = V_1 \cup V_2$ je nejaký rozklad vrcholov zodpovedajúci ofarbeniu dvoma farbami. Ak G má hamiltonovskú kružnicu, tak $|V_1| = |V_2|$.*

Dôkaz. Úloha 9.6.3. □

9.6.2 Postačujúce podmienky – Bondy–Chvátalova veta

Ukážeme si niektoré postačujúce podmienky, ktoré hovoria o existencii hamiltonovskej kružnici len na základe stupňov vrcholov grafu.

Konkrétne máme takýto výsledok – ktorý ale ukážeme o trochu neskôr ako špeciálny prípad vety 9.6.6 resp. dôsledku 9.6.7.

{hamilton:VTORE}

Veta 9.6.4 (Ore)**.** *Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak súčet stupňov ľubovoľných dvoch vrcholov, ktoré nie sú spojené hranou, je aspoň n, tak G má hamiltonovskú kružnicu.*

Z Oreho vety ľahko dostaneme ako dôsledok Diracovu vetu:

{hamilton:DOSDIRAC}

Dôsledok 9.6.5 (Dirac)**.** *Ak v grafe na n vrcholoch má každý vrchol stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, tak G má hamiltonovskú kružnicu.*

{hamilton:VTB

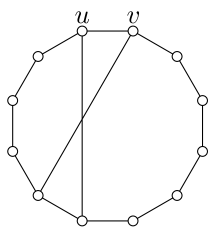
Veta 9.6.6 (Bondy–Chvátal)**.** *Nech G je graf s n vrcholmi. Nech u, v sú nejaké nesusedné vrcholy grafu G také, že*

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Označme G' graf, ktorý vznikne z grafu G pridaním hrany medzi vrcholmi u a v.

Potom graf G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď G' má hamiltonovskú kružnicu.

Dôkaz. TODO □



{hamilton:FIGBONDY}

Obr. 9.20: Ilustrácia dôkazu Bondy–Chvátalovej vety

Uvažujme teraz takúto konštrukciu. Ak máme nejaký graf, tak pre ľubovoľnú dvojicu nesusedných vrcholov u, v takú, že

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

pridáme medzi ne hranu. Tento postup opakujeme, kým v grafe sú nejaké takéto vrcholy. Výsledný graf nazvime *Bondy–Chvátalov uzáver* a označme ho $c(G)$.

Z vety 9.6.6 potom okamžite dostaneme:

amilton:DOSBONDYCHVATAL}

Dôsledok 9.6.7. *Graf G obsahuje hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď jeho uzáver $c(G)$ obsahuje hamiltonovskú kružnicu.*

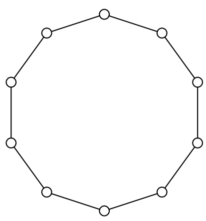
Teraz pomerne ľahko vidíme, že ako dôsledok dostávame aj Oreho vetu 9.6.4. Ak totiž pre ľubovoľné dva nesusedné vrcholy v grafe G platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, tak jeho uzáver je kompletný graf K_n. Pretože K_n evidentne má hamiltonovskú kružnicu, z dôsledku 9.6.7 máme, že aj G má hamiltonovskú kružnicu.

9.6.3 Petersenov graf nie je hamiltonovský

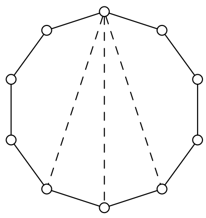
Tvrdenie 9.6.8. *Petersenov graf nemá hamiltonovskú kružnicu.*

Dôkaz. Petersenov graf má 10 vrcholov, každý z nich má stupeň 3. Všimnime si tiež, že Petersenov graf neobsahuje kružnice dĺžok tri ani štyri – úloha 9.2.11.

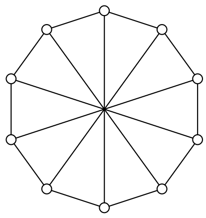
Predpokladajme, že by Petersenov graf mal hamiltonovskú kružnicu. Teda jeho vrcholy by sme nejako mohli nakresliť na kružnicu. Každý vrchol má mať stupeň tri – teda v každom vrchole treba pridať ešte jednu hranu.



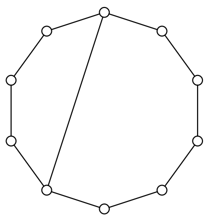
Ak si uvedomíme, že nesmie vzniknúť kružnica dĺžky tri ani štyri, tak pre ľubovoľný vrchol sú jediné možnosti vybrať si protiľahlý vrchol alebo vrcholy tesne vedľa neho.



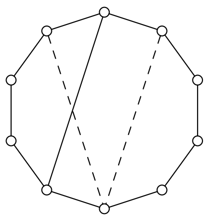
Taká možnosť, že pre každý vrchol by sme vybrali práve protiľahlý vrchol nefunguje – napríklad to vidno z toho, že v takomto grafe máme kružnicu dĺžky 4.



Teda určite aspoň v jednom vrchole máme takúto situáciu:



Ak sa teraz pozrieme na protiľahlý vrchol, tak tam nefunguje žiadna z našich troch možností. Ak by sme ho spojili s horným vrcholom, tak dostaneme vrchol stupňa štyri. A zostávajúce dve možnosti (naznačené na nasledujúcom obrázku) by vytvorili kružnice dĺžky štyri.



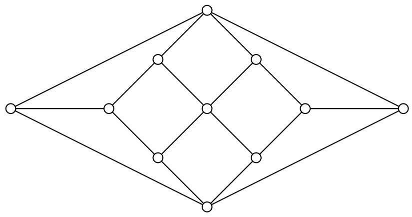
□

Cvičenia

{hamiltoncvic:ULOPLATON}

Úloha 9.6.1. Nájdite hamiltonovské kružnice pre grafy zodpovedajúce platónskym telesám (obr. 9.12).

Úloha 9.6.2. [Kn, Cvičenie 9.7] Dokážte, že graf na nasledujúcom obrázku nemá hamiltonovskú kružnicu. (Tento graf sa nazýva Herschelov graf.)



{hamiltoncvic:ULOPARNE}

Úloha 9.6.3. Nech graf G má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, ak G sa dá ofarbiť dvoma farbami, tak pri ľubovoľnom takomto ofarbení sa obe farby vystkytnú rovnako veľakrát. T.j. ak $V = V_1 \cup V_2$ je rozklad taký, že žiadna hrana grafu neleží vo V_i, $i = 1, 2$, tak $|V_1| = |V_2|$.

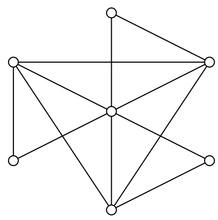
Úloha 9.6.4. Ukážte, že graf $K_{m,n}$ má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď $m = n \geq 2$.

Úloha 9.6.5. Nájdite príklad grafu, ktorý má hamiltovskú cestu, ale nemá hamiltonovskú kružnicu.

Úloha 9.6.6. [Kn, Cvičenie 9.9] Dokážte, že ak graf na n vrcholoch má viac ako $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán, tak má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte na príklade, že $\binom{n-1}{2} + 1$ hrán nestačí. (Hint: Možno pomôže Oreho veta.)

Úloha 9.6.7. Ukážte, že ak z Petersenovho grafu vynecháme niektorý vrchol, tak výsledný graf má hamiltonovskú kružnicu. (Z úlohy 9.1.1 resp. 9.1.2 vieme, že vynechaním ľubovoľného vrchola dostaneme izomorfný graf.)

Úloha 9.6.8. Ukážte, že nasledujúci graf nemá hamiltonovskú kružnicu.



Dodatok A

Prehľady kombinatorických identít

Na tomto mieste stručne zosumarizujeme aspoň niektoré identity (prípadne aj nerovnosti), ktoré sa vyskytli v tomto texte. V žiadnom prípade nejde o vyčerpávajúci zoznam – sú tu len tie dôležitejšie resp. známejšie identity. Dá sa nájsť viacero textov, ktoré sú venované špeciálne tomuto účelu – obsahujú veľké množstvo identít a slúžia hlavne ako referenčná príručka

A.1 Binomické koeficienty

A.1.1 Interpretácia binomického koeficientu

Binomický koeficient $\binom{n}{k}$ sme zaviedli ako počet k-prvkových podmnožín. Spomenuli sme však aj iné veci, ktoré sa dajú vyjadriť pomocou binomických koeficientov:

- Počet riešení $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ takých, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 0$ je rovný $\binom{n+k-1}{k-1}$ (tvrdenie 3.2.1).
- Počet riešení $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ takých, že $x_i \in \mathbb{Z}$ a $x_i \geq 1$ je rovný $\binom{n-1}{k-1}$ (dôsledok 3.2.4).
- Počet ciest z $(0,0)$ do (k,n) po štvorcovej mriežke je $\binom{n+k}{k}$, podkapitola 4.5.

A.1.2 Pascalov trojuholník

Keď človek rozmýšľa o rôznych identitách s binomickými koeficientami a chce sa s nimi hrať, overiť si ich na konkrétnych príkladoch, či na základe konkrétnych prípadov sa pokúsiť objaviť nejakú všeobecnú zákonitosť, môže byť užitočné mať poruke aspoň niekoľko prvých riadkov Pascalovho trojuholníka.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}$$
$$\binom{9}{0} \quad \binom{9}{1} \quad \binom{9}{2} \quad \binom{9}{3} \quad \binom{9}{4} \quad \binom{9}{5} \quad \binom{9}{6} \quad \binom{9}{7} \quad \binom{9}{8} \quad \binom{9}{9}$$
$$\binom{10}{0} \quad \binom{10}{1} \quad \binom{10}{2} \quad \binom{10}{3} \quad \binom{10}{4} \quad \binom{10}{5} \quad \binom{10}{6} \quad \binom{10}{7} \quad \binom{10}{8} \quad \binom{10}{9} \quad \binom{10}{10}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{0}$	$\binom{5}{0}$	$\binom{6}{0}$	$\binom{7}{0}$	$\binom{8}{0}$	$\binom{9}{0}$	$\binom{10}{0}$
$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{8}{1}$	$\binom{9}{1}$	$\binom{10}{1}$	
$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{9}{2}$	$\binom{10}{2}$		
$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{10}{3}$			
$\binom{4}{4}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{9}{4}$	$\binom{10}{4}$				
$\binom{5}{5}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{9}{5}$	$\binom{10}{5}$					
$\binom{6}{6}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{9}{6}$	$\binom{10}{6}$						
$\binom{7}{7}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{9}{7}$	$\binom{10}{7}$							
$\binom{8}{8}$	$\binom{9}{8}$	$\binom{10}{8}$								
$\binom{9}{9}$	$\binom{10}{9}$									
$\binom{10}{10}$										

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	3	6	10	15	21	28	36	45		
1	4	10	20	35	56	84	120			
1	5	15	35	70	126	210				
1	6	21	56	126	252					
1	7	28	84	210						
1	8	36	120							
1	9	45								
1	10									
1										

A.1.3 Sumy s binomickými koeficientmi

Základné vlastnosti Nasledujúcu rovnosť sme dokázali ako (4.6).

:EQFRACBINOM}

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}. \tag{A.1}$$

Túto identitu vieme zovšeobecniť nasledovne – úloha 4.3.4.

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}. \tag{A.2}$$

{prehlad:EQBINOMNKKL}

Súčty v riadku Nasledujúcu identitu sme odvodili derivovaním binomickej vety v (4.4), iné možnosti dôkazu sú naznačené v úlohách 4.2.7 a 4.4.1.

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \tag{A.3}$$

Hokejková identita Túto identitu sme dokázali v tvrdení 2.3.2:

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{A.4}$$

{prehladbinom:EQHOKEJ}

Vandermondova identita

$$\sum_{j=0}^{s} \binom{m}{j}\binom{n}{s-j} = \binom{m+n}{s} \tag{A.5}$$

{prehladbinom:EQVANDERMO

Ako špeciálny prípad dostaneme vyjadrenie pre súčet štvorcov binomických koeficientov v riadku Pascalovho trojuholníka:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n} \tag{A.6}$$

A.1.4 Nerovnosti s binomickými koeficientmi

A.2 Fibonacciho čísla

A.2.1 Definícia a základné vlastnosti

Maticové vyjadrenie sme odvodili v (7.7) a potom používali vo viacerých ďalších úlohách.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

{prehladfibon:EQMAT}

A.2.2 Rôzne identity

Cassiniho identita (7.9):

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \tag{A.8}$$

{prehladfibon:EQCASSINI}

Konvolúcia (7.10)

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \tag{A.9}$$

{prehladfibon:EQKONV}

Z nej sme ako špeciálne prípady dostali:

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \tag{A.10}$$ {prehladfibon

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \tag{A.11}$$ {prehladfibon

A.2.3 Sumy s Fibonacciho číslami

Dokázali sme aj vzťah (7.14) vyjadrujúci Fibonacciho čísla pomocou binomických koeficientov.

hladfibon:EQFIBSUMBINOM}

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \tag{A.12}$$

A.2.4 Fibonacciho čísla a deliteľnosť

{prehladfibon:EQGCD1}

$$\gcd(F_n, F_{n+1}) = 1 \tag{A.13}$$

{prehladfibon:EQGCDmn}

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)} \tag{A.14}$$

Literatúra

[B] V. K. Balakrishnan. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics including concepts of Graph Theory.* McGraw-Hill, New York, 1995.

[BM] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications.* North-Holland, New York, 1976.

[BQ] Arthur T. Benjamin and Jennifer J. Quinn. *Proofs that Really Count.* Mathematical Association of America, Providence, 2003. Dolciani Mathematical Expositions; no. 27.

[Č] Juraj Činčura. Elementárna teória čísel. Poznámky k prednáške, `https://web.archive.org/web/20190713075700/http://thales.doa.fmph.uniba.sk/cincura/public/Element.teor.cisel.pdf`.

[CH] John Clark and Derek Alan Holton. *A First Look at the Graph Theory.* World Scientific, 1991.

[D] Reinhard Diestel. *Graph Theory.* Springer-Verlag, Heidelberg, 3rd edition, 2005.

[E] Arthur Engel. *Problem Solving Strategies.* Springer, New York, 1998. Problem Books in Mathematics.

[H] Frank Harary. *Graph Theory.* Addison-Wesley, 1969.

[HKŠ] Jiří Herman, Radan Kučera, and Jaromír Šimša. *Counting and Configurations: Problems in Combinatorics, Arithmetic, and Geometry.* Springer, New York, 2003. CMS Books in Mathematics.

[J] Dieter Jungnickel. *Graphs, Networks and Algorithms.* Springer, Berlin, 4th edition, 2013. Algorithms and Computation in Mathematics, Volume 5.

[JJ] Gareth A. Jones and J. Mary Jones. *Elementary Number Theory.* Springer-Verlag, London, 1998. Springer Undergraduate Mathematics Series.

[Kn] Martin Knor. *Kombinatorika a Teória Grafov I.* Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.

[Ko] Július Korbaš. *Lineárna algebra a geometria I.* UK, Bratislava, 2003.

[L1] Loren C. Larson. *Problem solving through problems.* Springer, New York, 1983.

[L2] Loren C. Larson. *Metódy riešenia matematických problémov.* ALFA, Bratislava, 1990.

[Ma] David R. Mazur. *Combinatorics: A Guided Tour*. 2010. MAA Textbooks.

[Ml] Pavle Mladenović. *Combinatorics: A Problem-Based Approach*. Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019.

[MN] Jiří Matoušek and Jaroslav Nešetřil. *Invitation to Discrete Mathematics*. Oxford University Press, New York, 2nd edition, 2002.

[R] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 7th edition, 2012.

[S] Martin Sleziak. Teória čísel. Poznámky k prednáške, `https://msleziak.com/vyuka`.

[ŠHHK] T. Šalát, A. Haviar, T. Hecht, and T. Katriňák. *Algebra a teoretická aritmetika 2*. Alfa, Bratislava, 1986.

[V] N. Ya. Vilenkin. *Combinatorics*. Academic Press, New York, 1971.

Register

Zoznam symbolov