1 Úprava algebraických výrazov

1.1. Upravte uvedený výrazy na čo najjednoduchší tvar:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

c) $\sqrt{(-3)^2}$;

d) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$;

1.2. Zjednodušte zadané výrazy. Zistite aj, pre aké hodnoty premenných sú definované.

a) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

d) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; (Hint: Čo vychádza po dosadení čísla 1?)

e) $(x+y+z)^2$;

f) $(x+y+z)^3$;

g) $(x+y)(y+z)(x+z)$;

h) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$;

i) $\dfrac{x^4-y^4}{x-y}$;

j) $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$;

k) $(\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2})(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})$;

l) $\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}$;

m) $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$;

n) $\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+2)}$.

1.3. Čomu sa rovná x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$, $x_1^2-x_1$ a $x_1^2-x_2^2$ pre

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

(Číslo $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vystupujúce v tejto úlohe sa volá *zlatý rez* a dá sa s ním stretnúť v rôznych oblastiach.[1])

1.4. Zistite, či platí uvedená rovnosť pre ľubovoľné reálne čísla, pre ktoré má daný výraz zmysel. (Ak platí, tak sa ju pokúste zdôvodniť. Ak nie, tak nájdite aspoň jeden *konkrétny* kontrapríklad.)

a) $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;

b) $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$;

c) $\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$;

d) $\sqrt{a^2}=a$;

e) $(\sqrt{a})^2=a$;

f) $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;

g) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

[1] `https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio`

2 Sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+y+2z&=0\\ 2x+y+z&=1 \end{aligned}$$

Maticový zápis tejto sústavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Zápis ako súčin matice a stĺpcového vektora:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x+y&=3\\ 3x-2y&=-1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2\\ 2x+y+z&=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2\\ 2x+3y&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2\\ 2x+3y&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y-z&=2\\ 2x+3y&=2 \end{aligned}$$

3 Celé čísla, deliteľnosť, indukcia

3.1. Dokážte matematickou indukciou, že súčin troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný šiestimi.
3.2. Dokážte, že súčet tretích mocnín troch po sebe idúcich čísel je deliteľný 9.
3.3. Dokážte tvrdenie: Číslo n je nepárne *práve vtedy, keď* n^2 je nepárne.
3.4. Dokážte, že ak k a l sú párne čísla, tak aj číslo $k+l$ je párne. Je pravdivá aj obrátená implikácia?
3.5. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí $4^n > 3^n + 2^n$.
3.6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3.7. Dokážte, že $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$
3.8. Dokážte $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

4 Reálne, komplexné čísla

4.1. Ktoré reálne čísla spĺňajú nerovnicu $|x-2| \leq 5$.
4.2. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice:
a) $|x-2| + |x+2| = 4$;
b) $|x-2| + |x+2| = 6$;
c) $|x-2| + |x+2| = 2$.

4.3. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice:
a) $|x-2|-|x+2|=4$;
b) $|x-2|-|x+2|=6$;
c) $|x-2|-|x+2|=2$;
d) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$.

4.4. Pre ktoré reálne číslo c má rovnica $|x^2+12x+34|=c$ práve 3 riešenia?

4.5. Nad reálnymi číslami rozložte na lineárne činitele mnohočlen x^3+4x^2+x-6.

4.6. Ako sa definuje absolútna hodnota $|x|$ reálneho (resp. komplexného) čísla x? Dokážte, že ak a, b sú komplexné čísla, tak

$$|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2).$$

Dá sa táto rovnosť nejako interpretovať aj geometricky?

4.7. Nech i je imaginárna jednotka. Dokážte, že $i^{n+4}=i^n$ pre každé prirodzené číslo n.

4.8. Pre ktoré reálne x má komplexné číslo $x+\frac{\sqrt{5}}{3}i$ absolútnu hodnotu 1.

4.9. Ak máme dve komplexné čísla $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+i\sin\beta$, čomu sa rovná ich súčin z_1z_2? (Moivrova veta)

4.10*. Vedeli by ste pomocou komplexných čísel odvodiť vzorec pre $\cos 2x$, $\sin 2x$? Dalo by sa to použiť pre $\sin 3x$, $\cos 3x$, $\sin nx$, $\cos nx$?

5 Množiny

5.1. Množina M pozostáva z párnych čísel väčších ako $\frac{17}{3}$ a menších ako $\frac{168}{9}$ a tiež z nepárnych kladných čísel menších ako $\frac{323}{32}$. Napíšte všetky prvky množiny M.

5.2. Určte prienik množín A a B, ak A je množina kladných celých čísel deliteľných troma alebo piatimi, ktoré sú menšie ako $\frac{301}{6}$ a B je množina prvočíselných deliteľov čísla 90.

5.3. Čomu sa rovná $A\cap B$ a $A\cup B$, ak $A=\{2n;n\in\mathbb{Z}\}$ a $B=\{3n;n\in\mathbb{Z}\}$?

5.4. Platí $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$ pre ľubovoľné množiny A, B?

5.5. Označme $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. (T.j. $A\triangle B$ je tzv. *symetrická diferencia* množín A, B; obsahuje tie prvky, ktoré patria práve do jednej z týchto dvoch množín.) Zdôvodniť, že $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$.

6 Rôzne

6.1. Rozhodnite, či sa priamka v rovine, ktorá je daná rovnicou $2x-5y=-2$ pretína s priamkou, ktorej rovnica je $2x+3y=4$.

6.2. Nájdite všetky možné predpisy, ktoré všetkým prvkom z množiny

$$M=\{\left(\frac{1+3i}{1-3i}\right)^2-\left(\frac{1-3i}{1+3i}\right)^2,\frac{1}{i}+\frac{1-i}{1+i}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\}$$

jednoznačne priradia prvky z množiny reálnych čísel patriacich do M.

6.3. Dokážte, že $\sqrt{2}$ aj $\sqrt{3}$ sú iracionálne čísla.

6.4. Dokážte, že $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.