

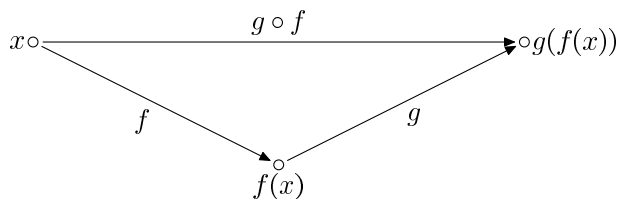
1 Definícia zobrazenia

- 1.1. Ak $A \neq \emptyset$, nájdite všetky zobrazenia $A \rightarrow \emptyset$ a $\emptyset \rightarrow A$. Existuje zobrazenie z \emptyset do \emptyset ?
- 1.2. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení množiny M do množiny N ?
- 1.3. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje injekcií/bijekcií $M \rightarrow N$?
- 1.4. Nech A je konečná množina a $f: A \rightarrow A$ je zobrazenie. Dokážte:
 - a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
 - b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.Ukážte na príklade, že pre nekonečné množiny tieto tvrdenia vo všeobecnosti neplatia.

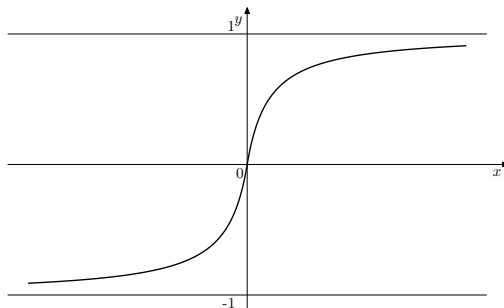
2 Skladanie zobrazení

Ak $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$, tak $g \circ f: X \rightarrow Z$ je definované ako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



- 2.1. Pre dané zobrazenia $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? Vedeli by ste načrtnúť grafy $f, g, g \circ f, f \circ g$?
 - a) $f(x) = x + 1, g(x) = x^2$;
 - b) $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$;
 - c) $f(x) = |x|, g(x) = x^2$;
 - d) $f(x) = \sqrt{|x|}, g(x) = x^2$;
 - e) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \geq 0, \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x < 0. \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \notin (-1, 1), \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x \in (-1, 1), x \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \in (-1, 1), x < 0 \end{cases}$



- 2.2. Pre dané zobrazenia $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množinu prirodzených čísel)

- a) $f(n) = 2n, g(n) = \lceil n/2 \rceil$;
 b) $f(n) = n + 1, g(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{ak } n \geq 2, \\ 1 & \text{ak } n = 1. \end{cases}$

3 Injekcia, surjekcia, bijekcia

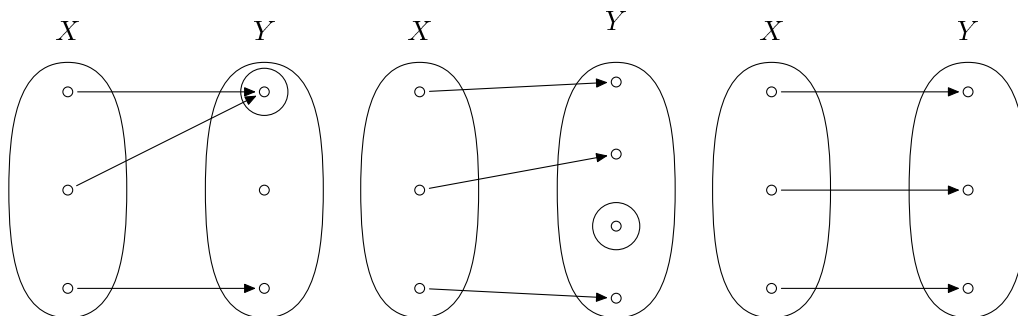
Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je

- *injekcia*, ak pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in X$ z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ vyplýva $x_1 = x_2$ -
- *surjekcia*, ak pre ľubovoľné $y \in Y$ existuje $x \in X$, ktoré sa naň zobrazí.
- *bijekcia*, ak je injekcia aj surjekcia.

Dve ekvivalentné definície injekcie:

$$(\forall x_1, x_2 \in X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



- 3.1. Dokážte: Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak aj g je surjekcia. Platí aj opačná implikácia? Musí byť f surjekcia?
- 3.2. Dokážte: Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.
- 3.3. Dokážte: Ak $g \circ f$ je bijekcia, tak f je injekcia a g je surjekcia.
- 3.4. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie a $X \neq \emptyset$ (t.j. X je neprázdna množina). Potom:
- f je injekcia práve vtedy, keď existuje g také, že $g \circ f = id_X$.
 - f je surjekcia práve vtedy, keď existuje h také, že $f \circ h = id_Y$.
 - K zobrazeniu f existuje inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia. (Tým sme znovu dokázali tvrdenie hovoriace, že zobrazenie je bijektívne práve vtedy, keď k nemu existuje inverzné zobrazenie.)
- 3.5. Nech $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X, h: Y \rightarrow X$ sú zobrazenia. Ak g aj h sú inverzné zobrazenia k f , tak $g = h$.
- 3.6. Nech $f: X \rightarrow Y$ je surjekcia a $g, h: Y \rightarrow Z$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.
- 3.7. Nech $f: Y \rightarrow Z$ je injekcia a $g, h: X \rightarrow Y$ sú zobrazenia. Dokážte, že ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.
- 3.8. Dokážte: Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je surjekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h: Y \rightarrow Z$ platí: Ak $g \circ f = h \circ f$, tak $g = h$.
- 3.9. Dokážte: Zobrazenie $f: X \rightarrow Y$ je injekcia práve vtedy, keď pre každú množinu Z a všetky zobrazenia $g, h: Z \rightarrow X$ platí: Ak $f \circ g = f \circ h$, tak $g = h$.
- 3.10. LAG 1, 1.1.19(7): Pre zobrazenia $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definujeme ich súčet ako zobrazenie

$$f + g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

a súčin ako zobrazenie

$$f \cdot g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Je súčet, resp. súčin ľubovoľných dvoch bijekcií zo \mathbb{Z} na \mathbb{Z} znova bijekcia?

4 Inverzné zobrazenia

- 4.1. Nájdite príklad zobrazenia $f: X \rightarrow Y$, pre ktoré existuje ľavé inverzné zobrazenie, ale neexistuje pravé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $g: Y \rightarrow X$ také, že $g \circ f = id_X$, ale neexistuje $h: Y \rightarrow X$ také, že $f \circ h = id_Y$.
- 4.2. Nájdite príklad zobrazenia $f: X \rightarrow Y$, pre ktoré existuje pravé inverzné zobrazenie, ale neexistuje ľavé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $h: Y \rightarrow X$ také, že $f \circ h = id_Y$, ale neexistuje $g: Y \rightarrow X$ také, že $g \circ f = id_X$.

5 Vzor a obraz množiny*

K týmto úlohám sa na cvičení pravdepodobne *nestihneme* dostať, zatiaľ ich môžete ignorovať. (Ale ak vás zaujmú, môžete skúsiť niektoré z nich vyriešiť. Každopádne sa k veciam takéhoto typu neskôr dostanete na predmete 1-MAT-140 Diskrétna matematika (1) – čiže časom sa ich budete musieť naučiť.)

Pre $f: X \rightarrow Y$ a podmnožiny $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ označujeme

$$f[A] = \{f(x); x \in A\}$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

Inak povedané:

$$y \in f[A] \Leftrightarrow (\exists a \in A) y = f(a)$$
$$x \in f^{-1}[B] \Leftrightarrow f(x) \in B$$

- 5.1. Dokážte: Ak $A \subseteq B$, tak $f[A] \subseteq f[B]$.
- 5.2. Dokážte: $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
- 5.3. Ktoré z nasledujúcich tvrdení platia a ktoré neplatia? Zdôvodnite.
 - a) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$
 - b) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$
 - c) $f[A \cap B] \supset f[A] \cap f[B]$
 - d) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
 - e) $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
 - f) $f^{-1}[A \cap B] \supset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
 - g) $f[f^{-1}[B]] = B$
 - h) $f[f^{-1}[B]] \subset B$
 - i) $f^{-1}[f[A]] = A$
 - j) $f^{-1}[f[A]] \subset A$
 - k) $g \circ f[A] = g[f[A]]$
- 5.4. Ak X je množina, tak $P(X)$ budeme označovať množinu všetkých jej podmnožín. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie a $g: P(X) \rightarrow P(Y)$ je zobrazenie definované tak, že $g(A) = f[A]$ pre ľubovoľnú podmnožinu $A \subseteq X$. Dokážte, že f je prosté práve vtedy, keď g je prosté.
- 5.5. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia práve vtedy, keď pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.
- 5.6. Nech $f: X \rightarrow Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injekcia \Leftrightarrow pre ľubovoľné dve podmnožiny $A, B \subseteq X$ platí $f[B \setminus A] = f[B] \setminus f[A]$.