

1 Relácie ekvivalencie

Relácia na množine M je ľubovoľná podmnožina $R \subseteq M \times M$. Relácia ekvivalencie je taká relácia, ktorá je

- reflexívna: $(\forall x \in M) (x, x) \in R$;
- symetrická: $(\forall x, y \in M) (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$;
- tranzitívna: $(\forall x, y, z \in M) (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Namiesto $(x, y) \in R$ často používame aj označenie xRy . (Napríklad ak reláciu označím ako \sim , tak označenie $x \sim y$ určite vyzerá prirodzenejšie než $(x, y) \in \sim$.)

Triedy ekvivalencie:

$$[x] = \{y \in M; x \sim y\}$$

1.1. Overte, či relácia R je relácia ekvivalencie na množine M .

- M je ľubovoľná množina, $R = M \times M$;
- M je ľubovoľná množina, $R = \{(x, x); x \in M\}$
- $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Z}\}$;
- $M = \mathbb{Z}^2$, $R = \{((a, b), (c, d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
- $M = \mathbb{N}^2$, $R = \{((a, b), (c, d)) \in M \times M; a + d = b + c\}$;
- $M = \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) \in M \times M; |a - b| \leq 1\}$;
- $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x^2 = y^2\}$;
- $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, t.j. M je množina všetkých podmnožín množiny \mathbb{N} a $R = \{(A, B) \in M \times M; A \Delta B \text{ je konečná}\}$ (t.j. množiny A a B sú v relácii R , ak ich symetrický rozdiel $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je konečná množina);
- $M = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $R = \{(A, B) \in M \times M; \text{existuje bijekcia z } A \text{ do } B\}$;
- $M = \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; 3 \mid x + 2y\}$;
- $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M; x - y \in \mathbb{Q}\}$;
- $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in M \times M; x_1 = y_1\}$;
- $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in M \times M; x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2\}$;
- $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in M \times M; x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1\}$;
- $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in M \times M; x_1 = y_1 \vee x_2 = y_2\}$;
- $M = \{f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo \mathbb{Z} do \mathbb{Z} ; $R = \{(f, g) \in M \times M; f(1) = g(1)\}$;
- $M = \{f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\}$, t.j. M je množina všetkých zobrazení zo \mathbb{Z} do \mathbb{Z} ; $R = \{(f, g) \in M \times M; f(1) = g(0)\}$;
- $M = G$, kde (G, \circ) je grupa, H je podgrupa grupy G a $R = \{(x, y) \in M \times M; xy^{-1} \in H\}$. Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?
- M je ľubovoľná množina, $f: M \rightarrow S$ je ľubovoľné zobrazenie a $R = \{(x, y) \in M \times M; f(x) = f(y)\}$. (=LAG1, 1.6.12(1)) Sú niektoré relácii uvedených v ostatných častiach špeciálne prípady tejto relácie?

1.2. Koľko existuje relácií ekvivalencie na trojprvkovej množine $\{0, 1, 2\}$?

1.3. Dokážte: Ak R_1 a R_2 sú relácie ekvivalencie na tej istej množine M , tak aj $R = R_1 \cap R_2$ je relácia ekvivalencie na M . (Všimnite si, že $(a, b) \in R \Leftrightarrow (a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2$.) Platí podobné tvrdenie aj pre zjednotenie relácií ekvivalencie?

2 Faktorové grupy

Ak máme komutatívnu grupu $(G, +)$ a nejakú jej podgrupu H , tak predpis¹

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in H$$

¹Ak by sme označovali operáciu ako \cdot , tak by sme tú istú podmienku zapísali ako $xy^{-1} \in H$.

určuje reláciu ekvivalencie na množine G .

Množinu všetkých tried tejto ekvivalencie označíme ako G/H , t.j.

$$G/H = \{[a]; a \in G\}.$$

Predpis

$$[a] + [b] = [a + b]$$

potom určuje dobre definovanú binárnu operáciu na množine G/H . Dá sa dokázať, že G/H s touto operáciou tvorí grupu. Túto grupu voláme faktorová grupa grupy $(G, +)$ podľa podgrupy H .

Veta o faktorovom izomorfizme. Nech G, G' sú grupy, navyše G je komutatívna.² Ak $f: G \rightarrow G'$ je surjektívny homomorfizmus, tak $\text{Ker } f$ je podgrupa grupy G a platí

$$G/\text{Ker } f \cong G',$$

t.j. faktorová grupa G podľa $\text{Ker } f$ je izomorfná s G' .

2.1. Ukážte, že faktorová grupa G/H je izomorfná s grupou K . (Aspoň jednu úlohu skúste vyriešiť priamo pomocou definície faktorovej grupy a aspoň jednu úlohu pomocou vety o faktorovom izomorfizme.)

- $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y); x + 2y = 0\}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
- $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, 3x); x \in \mathbb{R}\}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
- $G = (\mathbb{C}, +)$, $H = \mathbb{R}$, $K = (\mathbb{R}, +)$;
- $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 2\mathbb{Z}_4 = \{0, 2, 4, 6\}$, $K = (\mathbb{Z}_2, +)$;
- $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 4\mathbb{Z}_2 = \{0, 4\}$, $K = (\mathbb{Z}_4, +)$;
- $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $K = \{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}$;
- $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$, $K = \{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}$;
- $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = 4\mathbb{Z} = \{4z; z \in \mathbb{Z}\}$, $K = \mathbb{Z}_4$;
- $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+$, $K = (\mathbb{Z}_2, +)$;
- $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $H = \{\pm 1\}$, $K = (\mathbb{R}^+, \cdot)$

2.2. Zistite, či dané grupy sú izomorfné. V celom cvičení budeme ako S označovať grupu $(\{c \in \mathbb{C}; |c| = 1\}, \cdot)$ (prípadne množinu prvkov tejto grupy) a $C_n = (\{c \in \mathbb{C}; c^n = 1\}, \cdot)$

- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / \{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / \mathbb{R}^+$ (pod \mathbb{R}^+ tu myslíme kladné reálne čísla, čiže $0 \notin \mathbb{R}^+$), S
- $(\mathbb{R}, +) / \mathbb{Z}$, S / C_n , S
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) / C_n$
- $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot) / \mathbb{R}^+$, C_n
- $(\{c \in \mathbb{C}; c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot) / C_n$, \mathbb{R}^+
- C_{12} / C_4 , \mathbb{Z}_3
- $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +) / (\mathbb{Z}_2 \times \{0\})$, \mathbb{Z}_3

2.3. Nech G je komutatívna grupa a H je jej podgrupa. Ukážte, že zobrazenie $f(x) = x + h$ je bijekcia medzi H a $[x]_H$. (T.j. pre každú triedu rozkladu G podľa H máme bijekciu medzi H a $[x]_H$.)³

²Tento predpoklad je tu iba preto, aby vôbec malo zmysel hovoriť o faktorovej podgrupe. Ak sa neskôr budete učiť o normálnych podgrupách, tak zistíte, že faktorové grupy sa dajú robiť aj pre nekomutatívne grupy. Vtedy to však nebude fungovať s ľubovoľnou podgrupou. Matematici by sa s tým mali stretnúť na predmete Algebra (1) v druhom ročníku. Poistní matematici na predmete Úvod do vysokoškolskej matematiky (2).

³V skutočnosti keď si človek pozrie dôkazy tých vecí, ktoré bolo potrebné potiaľto, tak tie sa dali urobiť aj bez použitia komutatívnosti. Takže takéto tvrdenie platí aj pre nekomutatívne grupy.

- 2.4. S využitím predošlej úlohy dokážte, že ak G je konečná komutatívna grupa a H je jej podgrupa, tak počet prvkov H delí počet prvkov G . (T.j. $|G|$ je násobkom $|H|$.)⁴
- 2.5. Nech G je komutatívna grupa, $f: G \rightarrow G'$ je homomorfizmus grúp a $H = \text{Ker } f$. Ako $[a]$ označíme triedu prvku a vo faktorovej grupe G/H .
Dokážte, že pre ľubovoľné $a \in G$ platí

$$[a] = \{x \in G; f(x) = f(a)\}.$$

(Týmto vlastne dokážeme, že triedy rozkladu podľa $\text{Ker } f$ sú presne vzory jednoprvkových podmnožín $\text{Im } f$.)⁵

⁴Táto vlastnosť platí aj pre grupy, ktoré nie sú komutatívne. Neskôr sa s ňou ešte stretnete pod názvom *Lagrangeova veta*.

⁵<https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1917>