1 Vektorové priestory

$(V, +, \cdot)$ je vektorový priestor nad R ak $+\colon V \times V \to V$, $\cdot\colon R \times V \to V$ a platí

- $(V, +)$ je komutatívna grupa;
- $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ pre ľubovoľné $\alpha \in R$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$;
- $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in R$, $\vec{x} \in V$;
- $1\vec{x} = \vec{x}$ pre ľubovoľné $\vec{x} \in V$.

1.1. Ukážte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$.

1.2. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha}+\vec{\alpha}+\vec{\alpha}$?

1.3. Zistite, či $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ s operáciami $+$ a $\cdot$ definovanými tak, že $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ pre ľubovoľné $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a $r \cdot (a,b) = (ra, 2rb)$ pre ľubovoľné $r \in \mathbb{R}$, je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.

1.4. Zistite, či $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, ak definujeme $x \oplus y = xy$, $c \odot x = x^c$ pre $x, y \in \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}$.

2 Podpriestory

Ak V je vektorový priestor nad poľom R a M je *neprázdna* podmnožina V, tak tieto podmienky sú ekvivalentné:

- M je podpriestor priestoru V.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha \in R$ platí $\vec{x} + \vec{y} \in M$, $\alpha\vec{x} \in M$.
- Pre ľubovoľné $\vec{x}, \vec{y} \in M$ a $\alpha, \beta \in R$ platí $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in M$.

Ak M je podpriestor, tak $\vec{0} \in M$. (Každý podpriestor obsahuje nulový vektor.)

2.1. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$?
a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 \in \mathbb{Z}\}$
b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0\}$
c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$
d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 3x_1 + 4x_2 = 1\}$
e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 7x_1 - x_2 = 0\}$
f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 = x_3\}$
g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2|\}$
h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$
i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; 2x_1 = -x_2 = x_3\}$
j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

2.2. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^\mathbb{R}$?
a) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$
b) nezáporné funkcie
c) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$
d) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) f(x) = f(1 - x)$
e) ohraničené funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f) spojité funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
h) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
i*) funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že existuje konečná alebo nekonečná limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2.3. Nech S, T sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Ukážte, že $S \cup T$ je podpriestor priestoru V práve vtedy, keď $S \subseteq T$ alebo $T \subseteq S$.

2.4. Nech S_1, S_2, S_3 sú podpriestory vektorového priestoru V nad poľom F. Ukážte, že ak $S_1 \subseteq S_2 \cup S_3$, tak musí platiť $S_1 \subseteq S_2$ alebo $S_1 \subseteq S_3$.

2.5. Nech V je vektorový priestor nad poľom F a $S \neq \emptyset$ je podmnožina V. Ukážte, že S je podpriestor V práve vtedy, keď pre ľubovoľné $c \in F$ a $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in S$ platí $c\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in S$.