

1 Lineárna závislosť a nezávislosť

- 1.1. Overte, že \mathbb{R} je vektorový priestor nad poľom \mathbb{Q} . Dokážte, že v tomto priestore sú 1 , $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ lineárne nezávislé.
- 1.2. Ukážte, že vo vektorovom priestore \mathbb{R} nad \mathbb{Q} (z predošlej úlohy) sú lineárne nezávislé vektory $1 + 3\sqrt{2}$ a $2 - \sqrt{2}$.
- 1.3. Sú 1 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ lineárne nezávislé vo vektorovom priestore \mathbb{R} nad poľom \mathbb{Q} ? (Hint: Úlohu môže o niečo zjednodušiť, ak sa pozriete na 1 a $\sqrt{3}$ ako prvky priestoru \mathbb{R} nad poľom $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.)
- 1.4. Zistite, či dané vektory sú lineárne závislé v príslušnom vektorovom priestore:
 - a) $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 5)$ v \mathbb{R}^3 ,
 - b) $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 5)$, $(1, 127, 3)$ v \mathbb{R}^3 ,
 - c) $(1, 3, 4)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 4)$ v \mathbb{Z}_5^3
 - d) $(1, 3, 4)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 4)$ v \mathbb{Z}_7^3 .
- 1.5. Zistite, či sú nasledujúce funkcie lineárne závislé vo vektorovom priestore všetkých funkcií z \mathbb{R} do \mathbb{R} :
 - a) $x + 1$, x^2 , x^3 ,
 - b) 1 , $x + a$, $x^2 + bx + c$ (a, b, c môžu byť ľubovoľné reálne čísla),
 - c*) 1 , $\cos x$, $\cos^2(\frac{x}{2})$,
 - d) x , $x(x - 1)$, $x(x - 1)(x - 2)$,
 - e) 1 , $\cos x$, $\cos 2x$.

2 Báza a dimenzia

- 2.1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v \mathbb{R}^3 :
 - a) $(1, 2, 3)$, $(1, -2, 3)$, $(1, 2, -3)$
 - b) $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$
 - c) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$.
- 2.2. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v \mathbb{Z}_5^3 :
 - a) $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(0, 3, 1)$
 - b) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 3)$
 - c) $(0, 1, 2)$, $(3, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$.
- 2.3. Ako P_n označme priestor všetkých polynómov stupňa najviac n . Overte, že $d(P_n) = n + 1$ a že $1, x - 1, \dots, (x - 1)^n$ je báza tohoto priestoru.
- 2.4. Určte dimenziu podpriestoru $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$, ak $\vec{\alpha} = (1, 3, 2, 1)$, $\vec{\beta} = (4, 9, 5, 4)$ a $\vec{\gamma} = (3, 7, 4, 3)$ v \mathbb{R}^4 .
- 2.5. Nájdite bázu a dimenziu podpriestoru $P = [(1, 1, 1, 3), (1, 2, 3, 6), (1, 6, 6, 6), (3, 1, 4, 1)]$ priestoru \mathbb{Z}_7^3 .
- 2.6. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
 - a) $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 3)$ v \mathbb{R}^3 ,
 - b) $x^2 - 1, x^2 + 1$ v priestore polynómov stupňa najviac 3,
 - c) $(1, 2, 3, 0)$, $(3, 4, 1, 2)$ v \mathbb{Z}_5^4 .
- 2.7. Ak každý z vektorov $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m$, tak $d([\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_k]) \leq d([\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_m])$.
- 2.8. Máme dané vektory $\vec{\alpha}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\vec{\alpha}_2 = (0, 0, 3, 1)$ v priestore \mathbb{Z}_5^4 . Koľko existuje možností na výber vektorov $\vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4 \in \mathbb{Z}_5^4$ tak, aby tieto štyri vektory tvorili bázu?
- 2.9*. a) Nech $F = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2^2}; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Aká je dimenzia F , ak ho chápeme ako vektorový priestor nad poľom \mathbb{Q} ?
b) Vedeli by ste tento fakt využiť na zdôvodnenie, že pre ľubovoľný prvok $\alpha \in F \setminus \{0\}$ existuje v F inverzný prvok vzhľadom na násobenie? (Hint: Skúste sa pozrieť na vektory

- 1, α , α^2 , α^3 v tomto vektorovom priestore.)¹
- 2.10*. a) Nech p_1, \dots, p_k sú navzájom rôzne prvočísla. Ukážte, že čísla $\ln p_1, \ln p_2, \dots, \ln p_k$ sú lineárne nezávislé ako prvky vektorového priestoru \mathbb{R} nad poľom \mathbb{Q} .
- b) Ukážte, že vektorový priestor \mathbb{R} nad poľom \mathbb{Q} je nekonečnorozmerný.²

3 Súčty podpriestorov

Súčet podpriestorov je definovaný ako

$$S + T = \{\vec{s} + \vec{t}; \vec{s} \in S, \vec{t} \in T\}.$$

Jeho dimenziu môžeme (pre konečnorozmerné S a T) vyjadriť pomocou Grassmannovho vzorca³

$$\begin{aligned} d(S + T) &= d(S) + d(T) - d(S \cap T) \\ d(S + T) + d(S \cap T) &= d(S) + d(T) \end{aligned}$$

- 3.1. Zistite⁴ $d(U)$, $d(V)$, $d(U + V)$, $d(U \cap V)$, bázu $U + V$ a bázu $U \cap V$
- a) v \mathbb{R}^2 pre $U = [(2, 5)]$, $V = [(1, 3)]$
- b) v \mathbb{R}^3 pre $U = [(1, 2, 3), (-1, 2, 3)]$, $V = [(2, 1, 4), (-2, 1, 4)]$
- c) v \mathbb{R}^4 pre $U = [(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$, $V = [(1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1)]$
- d) v \mathbb{R}^4 pre $U = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$, $V = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0)]$.
[a)1,1,2,0; b)2,2,3,1; c)2,2,4,0; d)2,3,4,1]
- 3.2. Nech $T = [(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 4, 0)]$ je podpriestor $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho! Je tento podpriestor jednoznačne určený?
- 3.3. Dokážte, že ak $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ je báza vektorového priestoru V , tak $V = [\vec{e}_1] \oplus \dots \oplus [\vec{e}_k]$.
- 3.4. Ak máme zadané podpriestory

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}, \\ W_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x + y - 2z = 0\}, \\ W_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 7y + 3z = 0\}, \end{aligned}$$

nájdite $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ a $\dim(W_1 + W_2)$, $\dim(W_1 + W_3)$, $\dim(W_2 + W_3)$.

- 3.5. Nájdite príklad vektorového priestoru a podpriestorov $W_{1,2,3}$ takých, že⁵

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2 + W_3) &\neq \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3) - \\ &- \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \end{aligned}$$

¹Tento príklad ukazuje, že keď už vieme nejaké veci o vektorových priestoroch, tak sa dá oveľa jednoduchšie dokázať, že táto množina tvorí pole. Podobné typy úvah ešte stretnete aj na iných predmetoch, keď sa budete učiť o rozšíreniach poľí.

²Neskôr uvidíme jednoduchšie zdôvodnenie toho, že tento priestor nie je konečnorozmerný – budeme ale potrebovať vedieť nejaké veci o lineárnych izomorfizmoch a tiež o spočítateľných a nespočítateľných množinách.

³Tento vzorec sa ľahko pamätá, keďže sa podobá na vyjadrenie pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Pri počte prvkov máme podobné vyjadrenie aj pre viac než dve množiny – pre podpriestory už analogické tvrdenie neplatí.

⁴Pri tejto úlohe sa môže hodiť používať elementárne riadkové operácie a úpravu na redukovaný stupňovitý tvar. (Zaradil som ju už do tejto sady – t.j. zhruba v čase, keď sa preberajú súčty podpriestorov.)

⁵Toto ukazuje, že neplatí analógia vzťahu $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Pre zaujímavosť pridám aj takúto linku: <https://mathoverflow.net/q/23478> Examples of common false beliefs in mathematics.