Riadková ekvivalencia, úprava na RSM

Úlohy, ktoré sú tu, sa dajú riešiť použitím elementárnych riadkových operácií alebo úpravou na redukovaný stupňovitý tvar. (Samozrejme, nie je to jediná možnosť ako ich riešiť.)

Elementárne riadkové operácie:

- výmena 2 riadkov matice,
- vynásobenie niektorého riadku matice nenulovým prvkom c poľa F,
- pripočítanie násobku niektorého riadku k inému riadku.

Redukovaný stupňovitý tvar:

- Vedúci (=prvý nenulový) prvok každého riadku matice je 1.
- Každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má prvky v ostatných riadkoch nulové.
- Nulové riadky ležia pod nenulovými riadkami.
- vedúce jednotky sú usporiadané „zľava doprava“.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ak je matica v redukovanom tvare, tak jej nenulové riadky sú lineárne nezávislé.

Matice A a B sú riadkovo ekvivalentné práve vety, keď

- A aj B sú riadkovo ekvivalentné s tou istou redukovanou stupňovitou maticou;
- $S_A = S_B$ (t.j. ich riadky generujú rovnaký podpriestor).

1. Nájdite redukované trojuholníkové matice riadkovo ekvivalentné s nasledujúcimi maticami a) nad poľom $\mathbb{R}$ b) nad poľom $\mathbb{Z}_5$
   $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru $(\mathbb{Z}_5)^4$:
   a) $(1,2,0,0)$, $(3,4,0,1)$
   b) $(1,2,3,4)$, $(1,1,1,1)$, $(3,2,1,0)$
   c) $(2,3,4,1)$, $(3,2,4,1)$, $(0,2,3,2)$
   d) $(1,3,1,4)$, $(3,0,4,3)$, $(2,3,1,1)$
3. Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom $\mathbb{R}$:
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
4. Zistite, ktoré z daných vektorov patria do podpriestoru $[(1,4,1,0),(2,3,-2,-3),(0,2,-5,-6)]$ priestoru $\mathbb{R}^4$: a) $(4,11,-3,-3)$, b) $(1,0,11,12)$, c) $(3,0,4,1)$, d) $(1,-1,2,-2)$, e) $(1,-1,2,3)$.
5. Zistite, či $[\vec\beta_1, \vec\beta_2] \subseteq [\vec\gamma_1, \vec\gamma_2, \vec\gamma_3]$ vo vektorovom priestore $\mathbb{R}^4$ nad poľom $\mathbb{R}$, ak $\vec\gamma_1 = (1,1,5,1)$, $\vec\gamma_2 = (1,0,2,1)$, $\vec\gamma_3 = (2,1,0,1)$, $\vec\beta_1 = (1,1,5,1)$ a $\vec\beta_2 = (-1,1,6,-2)$.
6. Zistite hodnosti matíc
   $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
7. Upravte danú maticu nad poľom $\mathbb{R}$ na redukovaný trojuholníkový tvar a určte hodnosť matice
   $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 2 & 25 & -1 & -4 \\ 3 & 9 & 1 & 15 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$
8. Určte hodnosť danej matice v závislosti od parametra $c \in \mathbb{R}$
   $A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & c & 2c \\ 1 & -1 & 3 & -c \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 4 & c-1 & 2c \\ c & c & c \end{pmatrix}$

9. Zistite, či priestor $[(2,4,4,2,4),(3,1,1,2,2),(4,3,3,2,0)]$ je podpriestor priestoru $[(1,1,0,1,4),(2,1,3,3,1),(3,2,1,1,3)]$
a) nad $\mathbb{Q}$, b) nad $\mathbb{Z}_5$, c) nad $\mathbb{Z}_7$.
10. Zistite, ktoré z daných matíc sú navzájom riadkovo ekvivalentné:
$\left(\begin{smallmatrix} 2&3&1\\ 4&3&3\\ 1&2&4 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1&3&1\\ 2&4&3\\ 3&1&2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0&3&1\\ 2&0&3\\ 1&1&2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 3&0&1\\ 0&3&2\\ 1&0&3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1&0&1\\ 0&1&1\\ 2&1&3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 3&2&1\\ 4&2&1\\ 1&0&1 \end{smallmatrix}\right)$
11. Nájdite bázu daného podpriestoru a určite jeho dimenziu:
a) $[(1,1,0,-1),(0,1,2,1),(1,0,1,-1),(1,1,-6,-3),(-1,-5,1,0)]$ v $\mathbb{R}^4$;
b) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,-2,1,0)]$ v $\mathbb{R}^5$
c) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_5^5$
d) $[(1,2,2,0,1),(1,2,0,1,2),(1,2,3,1,0)]$ v $\mathbb{Z}_7^5$.
12. Zistite, pre aké hodnoty parametra c sú dané vektory lineárne závislé
a) $(-1,0,-1)$, $(2,1,2)$, $(1,1,c)$ v $\mathbb{R}^3$;
b) $(1,1,3)$, $(2,1,2)$, $(c,0,-c)$ v $\mathbb{R}^3$;
c) $(2,0,-1)$, $(3,2,0)$, $(1,-2,c)$ v $\mathbb{R}^3$.
13*. Určite hodnosť matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1}\\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & a_{n+1}^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

ak viete, že $a_1,\dots,a_{n+1}$ sú navzájom rôzne reálne čísla (t.j. $a_i \neq a_j$ pre všetky $i \neq j$). Pri riešení tejto úlohy môžete použiť fakt, že elementárne stĺpcové operácie nemenia hodnosť, resp. to, že $h(A) = h(A^T)$. (Tento fakt bude na prednáške neskôr.) Ale mala by sa dať vyriešiť aj bez použitia tejto veci.[1]
14. Zistite hodnosť matice

$$A = \begin{pmatrix} b & b & b-a\\ a-b & -b & a\\ a+b & b & 0 \end{pmatrix}$$

v závislosti od hodnôt parametrov $a,b \in \mathbb{R}$. (Opäť, ak sa vám to bude hodiť, môžete použiť fakt, že $h(A) = h(A^T)$.)

[1] Táto matica sa volá Vandermondova matica (Vandermonde matrix). Môžete o nej niečo viac nájsť na rôznych miestach (základné veci napríklad na `https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde_matrix`). Determinant tejto matice je vypočítaný v príklade 6.2.17(2) a úlohe 6.2.20(2) v LAG1.