

Termín na odovzdanie: výberové cvičenie počas druhého týždňa semestra (1. októbra).

Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Termín na odovzdanie: výberové cvičenie počas tretieho týždňa semestra (8. októbra).

Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad: Nech $M \neq \emptyset$ je množina a $f: M \rightarrow M$ je zobrazenie. Ak platí $f \circ f \circ f = f \circ f$, tak platí aj $f \circ f = f$.

Termín na odovzdanie: výberové cvičenie počas štvrtého týždňa semestra (15. októbra).

Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \square)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme

$$(a, b) \square (c, d) = (2ac, b + d),$$

je grupa. Overte aj to, či daná binárna operácia je komutatívna. (Symbol \mathbb{R}^+ označuje množinu kladných reálnych čísel. Vo Vašom riešení jasne vyznačte odpovede na otázky, či to je grupa a či je operácia komutatívna.)

Termín na odovzdanie: výberové cvičenie počas štvrtého týždňa semestra (22. októbra).

Pre množinu $X = \{0, 1\}$ zoberme množinu $\mathcal{P}(X)$ všetkých podmnožín množiny X . Pre $A, B \subseteq X$ uvažujme symetrickú diferenciu

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Je $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ komutatívna grupa? Svoje tvrdenie zdôvodnite!

Termín na odovzdanie: výberové cvičenie počas šiesteho týždňa semestra (29. októbra).

Úloha 1. Overte, či relácia \sim je relácia ekvivalencie na množine \mathbb{Z} . Relácia je zadaná podmienkou:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad 5 \mid x + 4y.$$

Termín na odovzdanie: výberové cvičenie počas siedmeho týždňa semestra (5. novembra).

Úloha 1. Nech $(G, +)$ je komutatívna grupa a H je jej podgrupa. Z prednášky vieme, že

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in H$$

je relácia ekvivalencie na množine G . (Využili sme ju pri definícii faktorovej grupy.)

Zoberme ľubovoľné dva prvky $x, y \in G$, budeme pracovať s ich triedami $[x]$ a $[y]$. Dokážte, že platí:

$$[x] + [y] = \{a + b; a \in [x], b \in [y]\}.$$

Termín na odovzdanie: výberové cvičenie počas deviateho týždňa semestra (19. novembra).
(V utorok 12. novembra je písomka – preto som nechal interval na odovzdávanie dvojtýždňový.)

Úloha 1. Pre zadané grupy G a G' nájdite takú podgrupu H grupy G , že platí $G/H \cong G'$.
(Alebo zdôvodnite, že taká podgrupa H v grupe G neexistuje.)

a) $G = (\mathbb{Z}_9, +)$ a $G' = (\mathbb{Z}_3, +)$

b) $G = (\mathbb{Z}_9, +)$ a $G' = (\mathbb{Z}_4, +)$

Termín na odovzdanie: výberové cvičenie počas desiateho týždňa semestra (26. novembra).

Úloha 1. Nájdite čísla $x, y \in \mathbb{Z}$ také, že

$$16x + 89y = 1.$$

(Stačí nájsť jednu takú dvojicu.)

Čomu sa rovná 16^{-1} v poli \mathbb{Z}_{89} ? (T.j. inverzný prvok k 16 vzhľadom na násobenie modulo 89.)

Fakt, že 89 je prvočíslo, považujte za daný – ten nemusíte overovať.