Priestory so skalárnym súčinom

Chceli by sme zopakovať najmä výpočet kolmého priemetu a matice projekcie. (Podobné veci budeme často robiť pri výpočte vzdialenosti afinných podpriestorov.)

1. Nájdite bázu a dimenziu $S^{\perp}$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
   a) $S = [(1,1,0,1),(2,1,0,1)]$
   b) $S = [(1,5,4,3),(2,-1,2,-1)]$
   c) $S = [(1,2,1,1),(2,1,-1,-1)]$
   d) $S = [(1,2,3,4),(1,1,1,1),(4,3,2,1)]$
   e) $S = [(2,1,2,3),(0,1,-2,1),(1,0,2,1)]$
   f) $S = [(1,1,1,2),(1,0,1,1),(0,1,2,1)]$

2. Majme vektory $v_1 = (1,1,0,1)$ a $v_2 = (0,0,1,0)$, ktoré generujú priestor S.
   a) Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $(1,0,-1,0)$ do S.
   b) Nájdite dva nenulové navzájom ortogonálne vektory, ktorých projekcia S je $\vec{0}$. (T.j. bude to ortogonálna báza $S^{\perp}$.)
3. [P, 1370] Nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (4,-1,-3,4)$ do podpriestoru $S = [(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)]$. [Výsledok by mal byť $(1,-1,-1,5)$.]
4. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $S = [(1,1,1,1),(1,2,2,-1),(1,0,0,3)]$.
   [Výsledok: $P = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$]
5. [P, 1372] Nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (7,-4,-1,2)$ na podpriestor S určený systémom rovníc
$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +9x_4 & = 0 \end{array}$$
6. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\vec{a} = (9,3,3,1)$ do podpriestoru $S = [(0,1,1,1),(2,1,2,1),(2,0,1,2)]$. [Výsledok je $(8,1,5,1)$.]
7. Nájdite maticu projekcie na podpriestor $S = [(0,1,1,1),(2,1,2,1),(2,0,1,2)]$. [Výsledok je $P = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$]
8. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $S = [(2,1,0,1),(1,-1,3,-1)]$
9. Nájdite ortogonálnu bázu priestoru $V = [(1,0,1,0),(0,2,-1,1),(0,2,1,3)]$.
10. Nech L_1 a L_2 sú podpriestory $\mathbb{R}^4$ zadané ako
$$L_1 = [(1,2,0,1),(2,1,1,1)] \qquad L_2 = [(1,1,1,1),(1,3,1,2)].$$
    a) Nájdite bázy priestorov $L_1^{\perp}$ a $L_2^{\perp}$. Ako by sa našli ortonormálne bázy priestorov $L_1^{\perp}$ a $L_2^{\perp}$?
    b) Nájdite bázu a dimenziu prieniku $L_1 \cap L_2$.
11. Nech U, V sú podpriestory priestoru so skalárnym súčinom. Ukážte, že platí
$$U^{\perp} \cap V^{\perp} = (U+V)^{\perp}.$$
    Ukážte, že ak pracujeme v *konečnorozmernom* priestore, tak platí
$$(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}.$$

Platí niektorá z inklúzií aj bez predpokladu o konečnorozmernosti? (Poznámka: Uvedené tvrdenie neplatí v nekonečnorozmerných priestoroch, ale kontrapríklad nie je úplne jednoduchý – prinajmenšom nie s vedomosťami o priestoroch so skalárnym súčinom, ktoré ste sa učili zatiaľ.)

Literatúra

[P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre.* Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.