

## 1 Podobnosť matíc

Matice  $A$  a  $B$  sú *podobné*  $\Leftrightarrow$  existuje regulárna matica  $P$  taká, že  $PAP^{-1} = B$ . Táto podmienka je ekvivalentná s tým, že  $A$  aj  $B$  predstavujú maticu toho istého zobrazenia v dvoch rôznych bázach. (Konkrétne, ak  $A$  je matica nejakého zobrazenia pri štandardnej báze, tak  $B = PAP^{-1}$  je matica toho istého zobrazenia pri báze určenej riadkami matice  $P$ .)

Ak  $\lambda \vec{v} = \vec{v}A$ , kde  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , tak  $\vec{v}$  je *vlastný vektor* matice  $A$  a  $\lambda$  je *vlastná hodnota* (*vlastné číslo*) matice  $A$ . Ekvivalentne:  $\lambda$  je vlastná hodnota práve vtedy, keď matica  $A - \lambda I$  je singulárna.

Vlastné hodnoty sú presne korene *charakteristického polynómu*  $\chi_A(t) = \det(tI - A)$  matice  $A$ . Ak ich počítame s algebraickou násobnosťou,<sup>1</sup> tak máme:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\ \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n\end{aligned}$$

a súčasne stopa a determinant súvisia aj s príslušnými koeficientami charakteristického polynómu. Špeciálne pre maticu  $2 \times 2$  máme  $\chi_A(t) = t^2 - \text{Tr}(A)t + \det(A)$ .

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm (a teda aj rovnakú stopu, determinant, vlastné čísla).

Pri hľadaní koreňov charakteristického polynómu je užitočné vedieť, že ak  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  je polynóm s vedúcim koeficientom 1, ktorý má navyše *celočíselné* koeficienty, tak každý *celočíselný* koreň je deliteľom absolútneho člena  $a_0$ .

Matica typu  $n \times n$  je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď jej vlastné vektory tvoria bázu priestoru  $F^n$ . Matice  $P$  a  $D$  také, že  $PAP^{-1} = D$ , kde  $P$  je regulárna a  $D$  je diagonálna, dostaneme tak, že  $D$  má na diagonále vlastné čísla a  $P$  má ako riadky (v rovnakom poradí) vlastné vektory.

*Jordanov normálny tvar.* Každá matica nad  $\mathbb{C}$  je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- 1.1. Vypočítajte charakteristický polynóm a vlastné hodnoty daných matíc. Zistite, či dané matice sú podobné:

a)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ ;

b) [P, 1067]  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$

- 1.2. [P, 1064] Zistite, či matice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$  sú podobné.

- 1.3. Nájdite diagonálnu maticu podobnú s danou maticou:

a)  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  nad poľom  $\mathbb{Q}$ ;

<sup>1</sup>t.j. ak  $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vlastné čísla sú:  $-5, 1$ . b) Vlastné čísla sú  $\pm\sqrt{2}$ .

- 1.4. Musia byť matice, ktoré majú rovnaké vlastné čísla, podobné?  
 1.5. Dokážte, že ak  $A$  a  $B$  sú podobné, tak sú podobné aj matice  $A - cI$  a  $B - cI$  (pre ľubovoľné  $c \in F$ ).  
 1.6. [P, 1051] Nech  $\varphi$  je ľubovoľná permutácia množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Dokážte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} a_{\varphi(1)\varphi(1)} & a_{\varphi(1)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(1)\varphi(n)} \\ a_{\varphi(2)\varphi(1)} & a_{\varphi(2)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(2)\varphi(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\varphi(n)\varphi(1)} & a_{\varphi(n)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(n)\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

sú podobné.

- 1.7. Zistite pre aké hodnoty parametrov  $a, b, c \in \mathbb{C}$  je daná matica (nad  $\mathbb{C}$ ) podobná s diagonálnou maticou.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix};$$

## 2 Vlastné čísla, vlastné vektory

- 2.1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory nad poľom  $\mathbb{C}$ .

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \text{ b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ d) } \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}, \text{ e) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla sú: a)  $-2, 7$ ; b)  $3 \pm 2i$ ; c)  $-3, 2$ ; d)  $-2, 3$ ; e)  $2, 2 \pm \sqrt{2}$

- 2.2. Nájdite regulárnu maticu  $P$  a diagonálnu maticu  $D$  také, že platí  $PAP^{-1} = D$ . (Alebo zdôvodnite, že také matice neexistujú.)

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ c) } A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 13 \\ -2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ e) } A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -18 \\ 14 & 1 & -18 \\ 10 & 2 & -15 \end{pmatrix} \text{ f) } A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ g) } A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2.3. Ukážte, že matica  $A$  je singulárna práve vtedy, keď  $0$  je jej vlastné číslo.  
 2.4. Ukážte, že ak  $A$  je regulárna, tak matice  $A$  a  $A^{-1}$  majú rovnaké vlastné vektory. Čo viete povedať o vlastných hodnotách?  
 2.5. Nech  $A$  je matica typu  $n \times k$  a  $B$  je matica typu  $k \times n$ . Ukážte, že:  
 a) Nenulové vlastné hodnoty matíc  $AB$  a  $BA$  sú rovnaké.  
 b) Platilo by tvrdenie z predošlej časti po vynechaní slova nenulové?  
 c) Ak  $k = n$  matice  $AB$  a  $BA$  majú rovnaké vlastné hodnoty.  
 2.6. [K, 4005] Ukážte, že ak každý nenulový vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  je vlastným vektorom matice  $A$ , tak  $A = cI$  pre nejaké  $c \in \mathbb{R}$ .  
 2.7. Aké matice sú podobné s maticou  $I$ ? Aké matice sú podobné s nulovou maticou?  
 2.8. Nech  $A$  je matica  $n \times n$  nad poľom  $\mathbb{C}$  taká, že pre každú regulárnu maticu  $n \times n$  platí  $PAP^{-1} = A$ . Ukážte, že potom  $A = cI$  pre nejaké  $c \in \mathbb{C}$ . (Inak povedané, týmto sme charakterizujeme také matice, že  $A$  je podobná sama so sebou a už so žiadnou

inou maticou. T.j. trieda ekvivalencie tejto matice pri relácii „podobnosť matíc“ je jednoprvková.)

- 2.9. Nech  $A$  je štvorcová matica nad poľom  $\mathbb{C}$  taká, že 1 nie je jej vlastná hodnota. Ukážte, že ak  $A^n = I$ , tak  $A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I = 0$ .
- 2.10. Nájdite maticu  $3 \times 3$ , ktorej vlastné čísla sú 1, 2, 3 a táto matica má aspoň sedem nenulových prvkov.
- 2.11. Nech  $A \in M_{n,n}(F)$ ,  $\vec{x} \in F^n$  a pre  $\lambda \in F$  platí  $\vec{x}A = \lambda\vec{x}$ . Nech  $p(t)$  je ľubovoľný polynóm nad poľom  $F$ . Dokážte, že potom platí aj  $\vec{x}p(A) = p(\lambda)\vec{x}$ .

### 3 Charakteristický a minimálny polynóm

- 3.1. Ukážte, že podobné matice majú rovnaký charakteristický aj minimálny polynóm. Dá sa na základe toho usúdiť, že majú aj rovnaký determinant a stopu?
- 3.2. \* Dokážte, že každé vlastné číslo matice  $A$  je koreňom jej minimálneho polynómu  $m_A(x)$ .
- 3.3. Ak viete, že charakteristický polynóm matice  $A$  je  $\chi_A(x) = x^2 + 4x - 5$ , ako vyzerá charakteristický polynóm matice  $A^2$ .
- 3.4. Nech  $A$  je matica typu  $n \times 2$  a  $B$  je matica typu  $2 \times n$ . Dokážte, že ak  $(AB)^2 = 0$ , tak aj  $(BA)^2 = 0$ . (Hint: Čo viete povedať o vlastných hodnotách matice  $BA$ , prípadne o jej minimálnom či charakteristickom polynóme.)
- 3.5. Nech  $A = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$  a  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ . Dokážte, že pre  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$ , platí  $3a_n + b_n + 3c_n + 4d_n = 7$ . (Niekoľko hintov – každý vedie k inému riešeniu. Hint 1: Ak nájdete riadkové a stĺpcové vlastné vektory tejto matice, čo viete o  $\vec{r}A^n$  a  $A^n\vec{c}^T$ ? Hint 2: Vedeli by ste nájsť  $P_n$  a  $Q_n$  také, že  $A^n = P_nA + Q_nI$ ? Hint 3: Asi by ste mali byť schopní nájsť aj všeobecné vyjadrenie pre  $a_n, b_n, c_n, d_n$  – aj keď takýto postup je asi zdĺhavejší než postupy spomenuté v predošlých dvoch hintoch.)
- 3.6. Budeme uvažovať o reálnych a komplexných maticiach takých, že

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

- a) Ukážte, že ak  $x_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ , tak z podmienky (1) vyplýva  $x_1 = x_2 = x_3$ .
- b) Ukážte, že existujú komplexné matice také, že platí (1) a súčasne  $x_1, x_2, x_3$  nie sú rovnaké.

### 4 Súčasná diagonalizácia\*

- 4.1. Nech pre matice  $A, B$  existuje regulárna matica  $P$  taká, že  $PAP^{-1} = D_1$  aj  $PAP^{-1} = D_2$  sú diagonálne matice. Ukážte, že  $AB = BA$ , t.j. matice  $A, B$  komutujú.
- 4.2\*. Zistite, či pre dané matice  $A, B$  existuje regulárna matica  $P$  taká, že  $PAP^{-1}$  aj  $PBP^{-1}$  sú diagonálne:

- a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- b)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Literatúra

- [K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry*. OPA, Amsterdam, 1996.
- [P] I. V. Proskurjakov. *Sborník zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.