

1 Kvadratické formy

Kanonický tvar. Lubovoľná kvadratická forma sa dá previesť zámenou premenných na kanonický tvar. Maticovo to môžeme vyjadriť tak, že ľubovoľná symetrická matica je kongruentná s diagonálnou maticou $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ takou, že $d_i \in \{0, \pm 1\}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Kladná definitnosť.

- Reálna symetrická matica A je kladne definitná, ak pre každé $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí $\vec{x}A\vec{x}^T > 0$.
- Kladne definitné sú presne tie matice, ktorých kanonický tvar má na diagonále iba jednotky. T.j. matice tvaru $A = PP^T$.
- Sylvestrovo kritérium: Matica A je kladne definitná $\Leftrightarrow$ všetky rohové determinanty sú kladné, t.j. $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n = |A| > 0$.

Ortogonalna podobnosť.

- Matica A je ortogonalna $\Leftrightarrow AA^T = I$, t.j. $A^T = A^{-1}$. To platí práve vtedy, keď riadky (stĺpce) tvoria ortonormálnu bázu.
- Pre ľubovoľnú reálnu symetrickú maticu A existujú ortogonalna matica P a diagonálna matica D tak, že

$$PAP^T = PAP^{-1} = D.$$

- Ak A je reálna symetrická matica, tak vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám sú na seba kolmé.

1.1. Nájdite kanonický tvar danej kvadratickej formy a transformáciu premenných, ktorá ju prevedie na kanonický tvar.

- $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
- $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$
- $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$
- $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$
- $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$
- $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$
- $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$
- $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2$

Riešenia: a), b), f), h) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; c) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; d) $y_1^2 - y_2^2$; e) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; g) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; j) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; (Transformáciu premenných som sem nedával – tá nie je určená jednoznačne.)

1.2*. [FS, 528] Preveďte kvadratickú formu $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} x_i x_k$ na diagonálny tvar.

$$[\text{Výsledok: } y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2; P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}]$$

(Toto samozrejme nie je jediná možnosť.)

1.3*. [FS, 529] Preveďte kvadratickú formu $\sum_{1 \leq i < k \leq n} x_i x_k$ na diagonálny tvar.

1.4. Zistite, či predpis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$ predstavuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1.5. Zistite, či daná matica je kladne definitná.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Nie. b) Áno.

1.6. Pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ je daná kvadratická forma kladne definitná.

- a) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$
 b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
 c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$
 d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Odpovede: a) $|a| < \sqrt{\frac{5}{3}}$, b) $-\frac{4}{5} < a < 0$, c), d) pre žiadne a

1.7. Pre danú kvadratickú formu určte tie hodnoty parametra $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kladne definitná.

- a) $5x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3$
 b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$
 c) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - 3tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3 + 2x_1x_3$
 d) $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + t(6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2) + t^2(x_1^2 + x_2^2)$

(Poznámka: Niekedy sa výpočet determinantov $D_1, D_2, \dots$ môže zjednodušiť, ak zmeníte poradie premenných. Takáto zmena neovplyvní to, či je matica kladne definitná.)

1.8. Nech A je symetrická reálna matica taká, že $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$. (Determinanty $D_1, \dots, D_n$ označujú rohové determinanty vystupujúce v Sylvestrovom kritériu.) Dokážte, že potom $a_{nn} > 0$.

1.9. Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Definujme maticu $A = \|a_{ij}\|$ tak, že $a_{ij} = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle$. (Táto matica sa zvykne volať *Gramova matica*.) Dokážte, že $|A| \geq 0$ a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $|A| > 0$.

1.10. [P, 1201, 1202] Pre ktoré z uvedených kvadratických foriem existuje regulárna transformácia premenných, ktorá prevedie jednu z nich na druhú?

- a) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3; f_2 = y_1y_2 - y_3^2; f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;
 b) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3; f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$;
 $f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$

1.11. Z údajov ktoré sú zadané o reálnej symetrickej matici A zistite, ako vyzerá kanonický tvar príslušnej kvadratickej formy. (Dali by sa tieto úvahy použiť na zistenie kanonického tvaru pre niektoré kvadratické formy z predošlých príkladov?)

- a) Matica A je *kladne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.
 b) Matica A je *záporne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.
 c) A je nenulová symetrická matica rozmerov 3×3 , ktorá má nulovú stopu aj determinant, t.j. $\det(A) = \text{Tr}(A) = 0$.

1.12. Pre danú symetrickú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a *ortogonálnu* maticu P také, že platí $PAP^T = D$.

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
 e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$;
 i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; j) $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Výsledky: a) $\text{diag}(0, 4, 10)$; b) $\text{diag}(-1, -1, 2)$; c) $\text{diag}(1, 1, -1)$; d) $\text{diag}(-1, -1, 5)$; e)

- diag(0, 0, 6); f) diag(-3, -3, 3); g) diag(-1, -1, 5); h) diag(0, 5, 12); i) diag(-3, -4, 6); j) diag(-5, -5, 16);
- 1.13. Nájdite (ak taká matica existuje) ortogonálnu maticu P takú, že $PAP^T = D$ je diagonálna matica.
- a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
- e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
- f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
- i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
- j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- k) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2 Nerovnosti*

- 2.1. Nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu danej funkcie na množine M . (Prípadne sa môžete pokúsiť nájsť aj v akom bode sa maximum a minimum nadobúda.)
- a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $M = \mathbb{R}^2$
- b) $f(x, y) = xy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
- c) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
- d) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
- e) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
- f) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ (Hint: Táto úloha sa dá riešiť pomocou kvadratických foriem. Možno však kratšie riešenie nájdete použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti alebo niektorých iných nerovností, ktoré už poznáte.)
- g) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$;
- h) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1\}$;

Literatúra

- [FS] D. K. Faddeev and I. C. Sominskii. *Zadachi po vysšej algebre*. Laň, St. Peterburg, 1999.
- [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.