

Skalárny súčin

- (i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$,
- (ii) $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$,
- (iii) $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$,
- (iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$.

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$$

- (a) $|\vec{\alpha}| \geq 0$
 - (b) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
 - (c) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$
 - (d) $|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (Schwarzova nerovnosť)
 - (e) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)
1. Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$. Nech $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$.
 - a) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
 - b) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
 - c) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
 - d) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
 - e) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
 - f) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
 - g) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
 - h) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
 - i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$
 2. Pre ľubovoľnú symetrickú maticu $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ definujeme $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$. Nájdite príklad matice, kedy tento predpis definuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$. Nájdite aj príklad matice, kedy to tak nie je. Ktoré vlastnosti z definície skalárneho súčinu budú splnené pre každú symetrickú reálnu maticu?
 3. Overte či predpis
 - a) $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
 - b) $\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$
 určuje skalárny súčin na priestore P_2 všetkých polynómov stupňa najviac 2 nad poľom $\mathbb{R}$.
 4. Zistite, či $\sin \pi x$ a $\cos \pi x$ sú kolmé v priestore $C(0, 1)$ so skalárnym súčinom z úlohy 7.1.5(3); t.j.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx.$$

Akú majú tieto vektory veľkosť?

5. Overte, že v priestore $C(0, 2\pi)$ všetkých spojitých funkcií z uzavretého intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ do $\mathbb{R}$ so skalárnym súčinom $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ sú ľubovoľné dve rôzne funkcie z množiny $\{1, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$ na seba kolmé. (Po vynormovaní by sme dostali množinu funkcií, ktorá má v tomto priestore do istej miery podobné vlastnosti ako ortonormálna báza v konečnorozmerných priestoroch. Tento systém funkcií je dôležitý v matematickej analýze v súvislosti s *Fourierovými radmi*.)
6. Dokážte, že v ľubovoľnom euklidovskom priestore platí:
 - a) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$ (Pytagorova veta)
 - b) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ (kosínová veta)
 - c) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$ (rovnobežníkové pravidlo)

7. LAG1 7.4.3(3): Dokážte, že ak S je vektorový podpriestor euklidovského vektorového priestoru, tak $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$.
8. Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ definujeme stopu matice ako súčet jej diagonálnych prvkov, t.j. $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Overte, či na vektorovom priestore $M_{n,n}(\mathbb{R})$ určuje predpis

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^T)$$

skalárny súčin. (Hint 1: Pokúste sa vyjadriť hodnotu $\langle A, B \rangle$ pomocou prvkov matíc A, B . Hint 2: Možno vám pri tom pomôžu rovnosti $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T)$. Prvá z nich sa dá ľahko overiť pomocou definície súčinu, druhá je zrejmá.)

9. Nájdite bázu a dimenziu $S^\perp$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
- $S = [(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)]$
 - $S = [(1, 5, 4, 3), (2, -1, 2, -1)]$
 - $S = [(1, 2, 1, 1), (2, 1, -1, -1)]$
 - $S = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$
 - $S = [(2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, 1)]$
 - $S = [(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 1)]$
10. Nájdite ortogonálnu bázu daného podpriestoru v $\mathbb{R}^n$ (so štandardným skalárnym súčinom):
- $S = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$
 - $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 2), (0, 1, 2, 1)]$
 - $S = [(1, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2, 1), (0, 1, 2, 1, 1)]$
11. Ukážte, že pre ľubovoľný podpriestor S euklidovského vektorového priestoru V platí $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$. (Hint: Skúste si uvedomiť, ktorú z inklúzií medzi S a $S^\perp$ sme v dôkaze, že $S^{\perp\perp} = S$ platí v konečnorozmerných priestoroch, dokázali bez použitia predpokladu o konečnorozmernosti. Túto inklúziu použijete raz pre S a raz pre $S^\perp$.)
- 12*. Ukážte, že ak $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia definovaná na vektorovom priestore V nad $\mathbb{R}$, ktorá spĺňa podmienky (a), (b), (c) a (e) i rovnobežníkové pravidlo, tak existuje skalárny súčin na V taký, že $|\alpha| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$ pre všetky $\vec{\alpha} \in V$.
13. Ukážte, že funkcia $|\cdot|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $|(x_1, \dots, x_n)| = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}$ spĺňa podmienky (a), (b), (c) a (e), ale neexistuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$ taký, že $|\alpha| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$ (pre všetky $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$).
14. V $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite vyjadrenie vektora $(4, 1, 1, 6)$ ako súčtu vektora z podpriestoru L a vektora z $L^\perp$, ak $L = [(1, 2, -2, -1), (2, 3, 3, 2), (1, 1, 2, 1)]$.
15. V priestore $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor

$$S = [(1, 0, 2, -2), (1, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)].$$

16. V priestore $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor

$$S = [(3, 2, 2, -1), (4, 2, 4, -3)].$$

17. Nech S je podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom. Nech P je ortogonálna projekcia na podpriestor S . Ukážte, že potom platí $P^2 = P = P^T$.
- 18*. Nech P je štvorcová matica nad $\mathbb{R}$ taká, že platí $P^2 = P = P^T$. Ukážte, že potom existuje podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^n$ (s obvyklým skalárnym súčinom) taký, že P je matica ortogonálnej projekcie na S .