

Determinanty

- Vypočítajte determinanty: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
Ak existuje inverzná matica, aký bude jej determinant? Výsledky (bez záruky): 0, -8, 8.
- Vyriešte v $\mathbb{Z}_5$ pomocou Cramerovho pravidla: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 1 & 0 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 2 \end{pmatrix}$
- Pomocou Cramerovho pravidla riešte:

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = & 1 & x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 0 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$
(Návod: Skúste zvoliť x_3, x_4 za parametre.)
- *. Majme regulárnu maticu A a sústavu tvaru $A\vec{x}^T = \vec{b}^T$. Označme ako A_i maticu, ktorá vznikne ak v matici A nahradíme i -ty stĺpec pravými stranami.
a) Vedeli by ste vymyslieť vhodnú maticu tak aby platilo $A \cdot B_i = A_i$?
b) Ak ste našli takú maticu, vedeli by ste pomocou nej odvodiť Cramerovo pravidlo?
- Dokážte (pomocou definície determinantu): Nech A, B sú matice, ktoré majú ostatné riadky rovnaké a líšia sa iba v i -tom riadku. Nech C je matica, ktorej i -ty riadok je súčet i -teho riadku matice A a i -teho riadku matice B , a všetky ostatné riadky sú rovnaké ako v týchto dvoch maticiach.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{b}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_{i-1} \\ \vec{a}_i + \vec{b}_i \\ \vec{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

Vedeli by ste tento výsledok aj interpretovať geometricky – pomocou objemu zodpovedajúceho rovnobežnostena? (Tento fakt spolu s tým, čo sa deje pri vynásobení konštantou, nám hovorí, že ak sa na determinant pozeráme ako na funkciu i -teho riadku, tak je to lineárne zobrazenie. Keďže to platí pre každý riadok, hovoríme tiež, že determinant je *multilineárne* zobrazenie.)

- Určte determinanty daných matíc. Viete na základe výsledku určiť ich hodnotu pre niektoré hodnoty $c \in \mathbb{R}$?
 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & c-1 \\ c-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & c+1 & 0 \\ 2 & c-1 & 2c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
- Vypočítajte determinant

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Dá sa výsledok nejako geometricky interpretovať? (Hovorí tento determinant niečo o lineárnom zobrazení s danou maticou?)

- Ak viete, že 195, 403 a 247 sú násobky čísla 13, viete ukázať (bez toho, aby ste ho museli vyrátať), že aj $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$ je celočíselný násobok 13?

9. Ukážte, že ak $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tak

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$$

10. Ukážte, že

$$\begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 \end{vmatrix} = -8$$

pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$.

11. Vypočítajte determinant matice $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$. Použite súčin

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

na odvodenie identity $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$. (Fibonacciho identita)

12. Vypočítajte

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & (n-1)x \\ 1 & x & \cdots & (n-1)x & nx \end{vmatrix}.$$

(Mali by ste dostať $x^{n-1}(x-1)$.)

13. Nech A je matica 4×4 , ktorá obsahuje iba čísla ± 1 . Ukážte, že $|A|$ je celočíselný násobok 8.
14. Ak A, B sú štvorcové matice a matica AB je regulárna, tak obe matice A, B sú regulárne. (Môžete sa zamyslieť nad tým, či to viete zdôvodniť s pomocou determinantov a aj nad riešením bez nich. Takisto sa môžete skúsiť zamyslieť nad tým, čo sa stane ak matice nie sú štvorcové.)
15. Nech A je matica rozmerov 2×3 a B je matica rozmerov 3×2 . Aké hodnoty môže nadobúdať $\det(AB)$? Aké hodnoty môže nadobúdať $\det(BA)$?
16. Permutáciu nazývame *párnou* ak má párny počet inverzií a *nepárnou* ak má nepárny počet inverzií. Vedeli by ste použitím determinantov ukázať, že počet párných a nepárných permutácií v S_n je rovnaký? (Hint: Možno vám pomôže determinant matice $n \times n$ pozostávajúcej zo samých jednotiek.)
17. Vedeli by ste nájsť maticu, ktorej determinant je $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$? Vedeli by ste pomocou determinantov odvodiť $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - xy - xz - yz)$? Viete nájsť všetky riešenia rovnice $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$?
18. $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$
19. $D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix} = ?$
20. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} = ?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné x a všetky prvky mimo diagonály sú rovné a .)

21. Nájdite všetky hodnoty $x \in \mathbb{C}$ pre ktoré

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

22. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$$

(Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslíte, ako to je s determinantami nejakých jednoduchších matíc – napríklad $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ alebo $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.)

23. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D$$

Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.

Determinanty

1. Nech A je matica 4×4 , ktorá obsahuje iba čísla ± 1 . Ukážte, že $|A|$ je celočíselný násobok 8.
2. Vedeli by ste nájsť maticu, ktorej determinant je $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$? Vedeli by ste pomocou determinantov odvodiť $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$? Viete nájsť všetky reálne riešenia rovnice $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$?

$$3. D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = ?$$

$$4. D_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} = ?$$

5. Vypočítajte determinant matice typu $n \times n$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & x & a \\ a & \dots & a & a & x \end{vmatrix} = ?$$

(Teda ide o maticu, kde diagonálne prvky sú rovné x a všetky prvky mimo diagonály sú rovné a .)

6. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$$

za predpokladu, že A a D sú štvorcové matice. (Hint: Možno sa oplatí začať tým, že si rozmyslíte, ako to je s determinantami nejakých jednoduchších matíc – napríklad

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ alebo } \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.)$$

7. Ukážte, že pre determinant blokovej matice platí

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B) = \det(A - BD^{-1}C) \det D$$

za predpokladu, že A a D sú regulárne štvorcové matice. Ukážte, že ak A a C komutujú, potom sa determinant rovná $\det(AD - CB)$.

8. Ukážte, že rovnosť

$$\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & x & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3,$$

kde $x, a \in \mathbb{R}$, platí práve vtedy, keď $x = a + 2$.

Skalárny súčin

- (i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle$,
- (ii) $\langle \vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle$,
- (iii) $\langle c\vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$,
- (iv) ak $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, tak $\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle > 0$.

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$$

- (a) $|\vec{\alpha}| \geq 0$
 - (b) $|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$
 - (c) $|c\vec{\alpha}| = |c||\vec{\alpha}|$
 - (d) $|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle| \leq |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (Schwarzova nerovnosť)
 - (e) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ (trojuholníková nerovnosť)
1. Zistite, či daný predpis určuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$. Nech $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$.
 - a) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 - a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + 3a_2b_2 - a_3b_3$
 - b) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1$
 - c) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_2 + 2a_2b_2 + a_3b_3$
 - d) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
 - e) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3$
 - f) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
 - g) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + a_2b_2 + 2a_3b_3$
 - h) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = a_1b_2 + a_2b_1$
 - i) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 3a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_3b_3$
 2. Pre ľubovoľnú symetrickú maticu $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ definujeme $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$. Nájdite príklad matice, kedy tento predpis definuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$. Nájdite aj príklad matice, kedy to tak nie je. Ktoré vlastnosti z definície skalárneho súčinu budú splnené pre každú symetrickú reálnu maticu?
 3. Overte či predpis
 - a) $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
 - b) $\langle f, g \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$
 určuje skalárny súčin na priestore P_2 všetkých polynómov stupňa najviac 2 nad poľom $\mathbb{R}$.
 4. Zistite, či $\sin \pi x$ a $\cos \pi x$ sú kolmé v priestore $C(0, 1)$ so skalárnym súčinom z úlohy 7.1.5(3); t.j.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx.$$

Akú majú tieto vektory veľkosť?

5. Overte, že v priestore $C(0, 2\pi)$ všetkých spojitých funkcií z uzavretého intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ do $\mathbb{R}$ so skalárnym súčinom $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ sú ľubovoľné dve rôzne funkcie z množiny $\{1, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$ na seba kolmé. (Po vynormovaní by sme dostali množinu funkcií, ktorá má v tomto priestore do istej miery podobné vlastnosti ako ortonormálna báza v konečnorozmerných priestoroch. Tento systém funkcií je dôležitý v matematickej analýze v súvislosti s *Fourierovými radmi*.)
6. Dokážte, že v ľubovoľnom euklidovskom priestore platí:
 - a) $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = 0 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$ (Pytagorova veta)
 - b) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ (kosínová veta)
 - c) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2(|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2)$ (rovnobežníkové pravidlo)

7. LAG1 7.4.3(3): Dokážte, že ak S je vektorový podpriestor euklidovského vektorového priestoru, tak $S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$.
8. Pre štvorcovú maticu typu $n \times n$ definujeme stopu matice ako súčet jej diagonálnych prvkov, t.j. $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Overte, či na vektorovom priestore $M_{n,n}(\mathbb{R})$ určuje predpis

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^T)$$

skalárny súčin. (Hint 1: Pokúste sa vyjadriť hodnotu $\langle A, B \rangle$ pomocou prvkov matíc A, B . Hint 2: Možno vám pri tom pomôžu rovnosti $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^T)$. Prvá z nich sa dá ľahko overiť pomocou definície súčinu, druhá je zrejmá.)

9. Nájdite bázu a dimenziu $S^\perp$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
- $S = [(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)]$
 - $S = [(1, 5, 4, 3), (2, -1, 2, -1)]$
 - $S = [(1, 2, 1, 1), (2, 1, -1, -1)]$
 - $S = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$
 - $S = [(2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, 1)]$
 - $S = [(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 1)]$
10. Nájdite ortogonálnu bázu daného podpriestoru v $\mathbb{R}^n$ (so štandardným skalárnym súčinom):
- $S = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$
 - $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 2), (0, 1, 2, 1)]$
 - $S = [(1, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2, 1), (0, 1, 2, 1, 1)]$
11. Ukážte, že pre ľubovoľný podpriestor S euklidovského vektorového priestoru V platí $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp$. (Hint: Skúste si uvedomiť, ktorú z inklúzií medzi S a $S^\perp$ sme v dôkaze, že $S^{\perp\perp} = S$ platí v konečnorozmerných priestoroch, dokázali bez použitia predpokladu o konečnorozmernosti. Túto inklúziu použijete raz pre S a raz pre $S^\perp$.)
- 12*. Ukážte, že ak $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia definovaná na vektorovom priestore V nad $\mathbb{R}$, ktorá spĺňa podmienky (a), (b), (c) a (e) i rovnobežníkové pravidlo, tak existuje skalárny súčin na V taký, že $|\alpha| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$ pre všetky $\vec{\alpha} \in V$.
13. Ukážte, že funkcia $|\cdot|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $|(x_1, \dots, x_n)| = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}$ spĺňa podmienky (a), (b), (c) a (e), ale neexistuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^n$ taký, že $|\alpha| = \sqrt{\langle \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \rangle}$ (pre všetky $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$).
14. V $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite vyjadrenie vektora $(4, 1, 1, 6)$ ako súčtu vektora z podpriestoru L a vektora z $L^\perp$, ak $L = [(1, 2, -2, -1), (2, 3, 3, 2), (1, 1, 2, 1)]$.
15. V priestore $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor

$$S = [(1, 0, 2, -2), (1, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)].$$

16. V priestore $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor

$$S = [(3, 2, 2, -1), (4, 2, 4, -3)].$$

17. Nech S je podpriestor priestoru $\mathbb{R}^n$ so štandardným skalárnym súčinom. Nech P je ortogonálna projekcia na podpriestor S . Ukážte, že potom platí $P^2 = P = P^T$.
- 18*. Nech P je štvorcová matica nad $\mathbb{R}$ taká, že platí $P^2 = P = P^T$. Ukážte, že potom existuje podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^n$ (s obvyklým skalárnym súčinom) taký, že P je matica ortogonálnej projekcie na S .

Priestory so skalárnym súčinom

Chceli by sme zopakovať najmä výpočet kolmého priemetu a matice projekcie. (Podobné veci budeme často robiť pri výpočte vzdialenosti afinných podpriestorov.)

- Nájdite bázu a dimenziu $S^\perp$ pre daný podpriestor S priestoru $\mathbb{R}^4$:
 - $S = [(1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)]$
 - $S = [(1, 5, 4, 3), (2, -1, 2, -1)]$
 - $S = [(1, 2, 1, 1), (2, 1, -1, -1)]$
 - $S = [(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1)]$
 - $S = [(2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 2, 1)]$
 - $S = [(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 2, 1)]$
- Majme vektory $v_1 = (1, 1, 0, 1)$ a $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, ktoré generujú priestor S .
 - Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $(1, 0, -1, 0)$ do S .
 - Nájdite dva nenulové navzájom ortogonálne vektory, ktorých projekcia S je $\vec{0}$. (T.j. bude to ortogonálna báza $S^\perp$.)
- [P, 1370] Nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (4, -1, -3, 4)$ do podpriestoru $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)]$. [Výsledok by mal byť $(1, -1, -1, 5)$.]
- Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $S = [(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)]$.

$$[\text{Výsledok: } P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}]$$

- [P, 1372] Nájdite kolmý priemet vektora $\vec{x} = (7, -4, -1, 2)$ na podpriestor S určený systémom rovníc

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +9x_4 & = 0 \end{array}$$

- Nájdite ortogonálnu projekciu vektora $\vec{a} = (9, 3, 3, 1)$ do podpriestoru $S = [(0, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 2)]$. [Výsledok je $(8, 1, 5, 1)$.]
- Nájdite maticu projekcie na podpriestor $S = [(0, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 2)]$. [Výsledok je $P = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$]

- Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $S = [(2, 1, 0, 1), (1, -1, 3, -1)]$
- Nájdite ortogonálnu bázu priestoru $V = [(1, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 1), (0, 2, 1, 3)]$.
- Nech L_1 a L_2 sú podpriestory priestoru $\mathbb{R}^4$ zadané ako

$$L_1 = [(1, 2, 0, 1), (2, 1, 1, 1)] \quad L_2 = [(1, 1, 1, 1), (1, 3, 1, 2)].$$

- Nájdite bázy priestorov $L_1^\perp$ a $L_2^\perp$. Ako by sa našli ortonormálne bázy priestorov $L_1^\perp$ a $L_2^\perp$?
 - Nájdite bázu a dimenziu prieniku $L_1 \cap L_2$.
- Nech U, V sú podpriestory priestoru so skalárnym súčinom. Ukážte, že platí

$$U^\perp \cap V^\perp = (U + V)^\perp.$$

Ukážte, že ak pracujeme v *konečnorozmernom* priestore, tak platí

$$(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp.$$

Platí niektorá z inklúzií aj bez predpokladu o konečnorozmernosti? (Poznámka: Uvedené tvrdenie neplatí v nekonečnorozmerných priestoroch, ale kontrapríklad nie je úplne jednoduchý – prinajmenšom nie s vedomosťami o priestoroch so skalárnym súčinom, ktoré ste sa učili zatiaľ.)

Literatúra

- [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.

1 Afinné priestory

Pripomenutie definícií:

Afinný priestor znamená, že $(V, +)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a:

- 1) máme zobrazenie $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow V$, ktoré dvojici bodov (X, Y) priradí práve jeden vektor $\overrightarrow{XY}$;
- 2) pre ľubovoľné $X \in \mathcal{B}$ a $\vec{x} \in V$ existuje práve jeden bod $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$;
- 3) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$

Ekvivalentná definícia:

$(V, +)$ je vektorový priestor, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a máme $+: \mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$, pričom platí:

- 1) $X + (\vec{a} + \vec{b}) = (X + \vec{a}) + \vec{b}$;
- 2) $X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
- 3) Pre ľubovoľné $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný vektor $\vec{a} \in V$ taký, že $X + \vec{a} = Y$; označujeme ho aj $\vec{a} = Y - X$.

V dôkaze ekvivalencie týchto definícií sa ukáže, že:

$$Y - X = \overrightarrow{XY};$$

$$X + \overrightarrow{XY} = Y.$$

- 1.1. Pre afinný priestor $(\mathcal{B}, V, +)$ dokážte, že:
 - (a) $(Y - X) + (X - Z) = Y - Z$ pre všetky $X, Y, Z \in \mathcal{B}$;
 - (b) $X - X = \vec{0}$ pre všetky $X \in \mathcal{B}$;
 - (c) $(X + \vec{a}) - (Y + \vec{b}) = (X - Y) + \vec{a} - \vec{b}$ pre všetky $X, Y \in \mathcal{B}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$.
- 1.2. Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3, 1); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, 0); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Dostaneme takto afinný priestor? (Ako operácie použijeme obvyklé sčítovanie štvoríc.)

Vedeli by ste nájsť aspoň dva rôzne afinné izomorfizmy $(\mathcal{B}, V) \rightarrow (\mathcal{B}, V)$?

- 1.3. [HZK, Cvičenie 2.1.1] Nech

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$$

a

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Dokážte, že $(\mathcal{B}, V)$ s obvyklým sčítaním trojíc reálnych čísel je dvojrozmerný afinný priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

- 1.4. [HZK, Cvičenie 2.1.2] Nech P_4 je množina všetkých reálnych polynómov stupňa najviac 4. (Na tejto množine máme obvyklú operáciu sčítovania polynómov.) Nech $\mathcal{B} := \{f(x) \in P_4; f(0) = 1\}$ a $V := \{f(x) \in P_4; f(0) = 0\}$. Overte, že $(\mathcal{B}, V)$ je štvorrozmerný afinný priestor (ak uvažujeme obvyklé operácie).

2 Afinné zobrazenia

Afinné zobrazenie: $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$, $\varphi: V \rightarrow V'$; zobrazenie φ je lineárne a platí $\varphi(\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{f(X)f(Y)}$.

Afinný izomorfizmus = afinné zobrazenie + bodová zložka je bijekcia $\Leftrightarrow$ afinné zobrazenie + vektorová zložka je lineárny izomorfizmus

- 2.1. Ukážte, že ak (f, φ) je afinný izomorfizmus, tak aj (f^{-1}, φ^{-1}) je afinný izomorfizmus.
- 2.2. Nech $(f, \varphi): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je afinné zobrazenie. Nech $(\mathcal{C}, V)$ je afinný podpriestor priestoru $\mathcal{B}$. Je aj $f^{-1}[\mathcal{C}]$ afinný podpriestor priestoru $\mathcal{A}$? Čo bude jeho vektorová zložka?

- 2.3. Nech $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je afinný súradnicový systém v afinnom priestore $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$. Nech $\mathcal{A}' = (\mathcal{B}', V')$ je tiež afinný priestor, $O' \in \mathcal{B}'$ a $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n \in V'$. Ukážte, že podmienkami $f(O) = O'$, $f(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i$ pre $i = 1, \dots, n$ je jednoznačne určené afinné zobrazenie $(f, \varphi): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$.

3 Afinné a barycentrické súradnice

Afinný súradnicový systém: $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, kde $O \in \mathcal{B}$ a $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza V .

Súradnice bodu X sú $(x_1, \dots, x_n)$, ak $\vec{OX} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$. Označenie $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$.

Ak pracujeme s $(\mathcal{B}, V) \subseteq (\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k})$ tak barycentrickú kombináciu $\sum_{i=0}^s x_i A_i$ dostaneme

tak, že počítame po súradniciach. Definujeme ju iba pre koeficienty také, že $\sum_{i=0}^s x_i = 1$.

Všeobecnejšia definícia (pre ľubovoľný afinný priestor): *Barycentrická kombinácia* $\sum_{i=0}^s x_i A_i$,

kde $\sum_{i=0}^s x_i = 1$, je definovaná ako

$$\sum_{i=0}^s x_i A_i = A + \sum_{i=0}^s x_i (A_i - A).$$

(Nezávisí od voľby bodu A .)

$(A_0, A_1, \dots, A_n)$ je barycentrický súradnicový systém $\Leftrightarrow$ každý bod sa dá jednoznačne vyjadriť ako ich barycentrická kombinácia $\Leftrightarrow (A_0; A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0)$ je afinný súradnicový systém.

- 3.1. [HZK, Cvičenie 2.3.1] Majme afinný priestor $(\mathcal{B}, V)$, kde

$$\mathcal{B} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\},$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\},$$

a berieme obvyklé operácie (t.j. ide o afinný podpriestor $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.)

a) Overte, že trojica $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, kde $O = (1, 2, -1)$, $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, -1, 0)$, tvorí afinný súradnicový systém v tomto priestore.

b) Vyjadrite súradnice bodu $P = (3, 4, 1)$ v tejto súradnicovej sústave. Vedeli by ste nájsť aj všeobecný predpis, ako dostaneme súradnice ľubovoľného bodu $P = (x_1, x_2, x_3)$ patriaceho do $\mathcal{B}$?

c) Definujme $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ako $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 2x_2, 2x_1 - 3x_2 - 1)$. Predstavujú hodnoty $f(x_1, x_2, x_3)$ súradnice bodu (x_1, x_2, x_3) v nejakej vhodnej súradnicovej sústave? Ak áno, nájdite taký afinný súradnicový systém $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$.

d) Ako by to bolo so zobrazením $g: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovaným ako $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + 1, x_1 - x_2 + 2)$?

- 3.2. [HZK, Cvičenie 2.3.31] V rovine určenej bodmi $A = (2, 1, 3)$, $B = (2, 4, 0)$, $C = (-3, 0, 4)$ zvolme afinnú súradnicovú sústavu $(A, B - A, C - A)$.

a) Aké parametrické vyjadrenie má v tejto súradnicovej sústave priamka BC ?

b) Aké súradnice má bod M v $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, ak jeho súradnice v $(A, B - A, C - A)$ sú $(5, 3)$.

c) Aké súradnice má priesečník roviny ABC s osou x_3 v jednej i druhej súradnicovej sústave.

- 3.3. Ukážte, že barycentrická kombinácia barycentrických kombinácií je opäť barycentrická kombinácia.

- 3.4. Nech body $A_0, A_1, \dots, A_n$ ležia v nejakom afinnom priestore $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ dimenzie n . Dokážte, alebo nájdite kontrapríklad:
- Ak každý bod $X \in \mathcal{B}$ sa dá vyjadriť ako barycentrická kombinácia bodov $A_0, A_1, \dots, A_n$, tak tieto body tvoria barycentrickú súradnicovú sústavu.
 - Ak neexistuje bod $X \in \mathcal{B}$, ktorý má dve rôzne vyjadrenia v tvare barycentrickej kombinácie bodov $A_0, A_1, \dots, A_n$, tak tieto body tvoria barycentrickú súradnicovú sústavu.
- 3.5. Zistite, či body
- $$A_0 = (1, 4, 1, -1)$$
- $$A_1 = (2, 2, 4, -5)$$
- $$A_2 = (1, 5, 0, 0)$$
- $$A_3 = (2, 7, 1, -4)$$
- $A_4 = (1, -3, 4, 4)$ tvoria barycentrický súradnicový systém v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Vyjadrite bod $P = (0, -1, 1, 4)$ ako ich barycentrickú kombináciu. (Výsledok: $P = A_1 - A_0 + 3A_2 - 2A_3$)
- 3.6. Nech A, B, C je trojuholník v ľubovoľnom afinnom priestore.
- Ako vyzerajú ťažnice tohoto trojuholníka vyjadrené a afinnom súradnicovom systéme $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$? (Pokúste sa vyjadriť ich parametricky, t.j. napísať nejaký predpis taký, že ak meníme reálny parameter, dostaneme všetky body ležiace na ťažnici.)
 - Ukážte, že ťažnice sa pretínajú práve v jednom bode.
 - Aké sú barycentrické súradnice tohoto bodu?
- 3.7. Nech A, B, C je trojuholník v rovine a T je jeho ťažisko (barycentrum).
- Ukážte, že $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.
 - Ukážte, že pre ľubovoľný bod X v rovine platí

$$|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + 3|XT|^2.$$

Môžete si všimnúť, že z tejto rovnosti vyplýva, že súčet štvorcov vzdialeností od vrcholov trojuholníka je minimálny práve v ťažisku trojuholníka. (Hint: Skúste využiť skalárny súčin.)

- Ako by sa zmenili výsledky z častí a) a b) ak by sme namiesto troch bodov v rovine zobrali n bodov v euklidovskom priestore ľubovoľnej dimenzie?
- 3.8. V trojrozmernom euklidovskom priestore sú dané štyri body A, B, C a D neležiace v jednej rovine. Na úsečkách AB, CD, AC a BD sú dané body K, L, M a N tak, že

$$|AK| : |KB| = |CL| : |LD| \text{ a } |AM| : |MC| = |BN| : |ND|$$

- Dokážte, že úsečky KL a MN sa pretínajú práve v jednom bode.
 - V akom pomere delí priesečník úsečiek KL a MN tieto úsečky?
- 3.9. Dokážte: a) Body $A \equiv (a_1, a_2)$, $B \equiv (b_1, b_2)$, $C \equiv (c_1, c_2)$ dvojrozmerného afinného priestoru ležia na jednej priamke práve vtedy keď

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

- Body $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $B \equiv (b_1, b_2, b_3)$, $C \equiv (c_1, c_2, c_3)$, $D \equiv (d_1, d_2, d_3)$ trojrozmerného afinného priestoru ležia v jednej rovine práve vtedy keď

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 0.$$

- Vedeli by ste to zovšeobecniť na n -rozmerný priestor a nadrovinu?

- 3.10. Na priamkach určených stranami AB , BC a AC trojuholníka ABC sú dané body $A' = B + a(C - B)$, $B' = C + b(A - C)$, $C' = A + c(B - A)$. Dokážte, že body A' , B' , C' ležia na jednej priamke práve vtedy keď $ab + bc + ac - a - b - c + 1 = 0$.
- 3.11. Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník v $\mathbb{R}^2$. Tvorí A , B , C barycentrickú súradnicovú sústavu? Vyjadrite v nej ostatné body šesťuholníka.

Literatúra

[HZK] Milan Hejný, Valent Zát'ko, and Pavel Kršňák. *Geometria 1*. SPN, Bratislava, 1985.

1 Všeobecné a parametrické vyjadrenie

- 1.1. [HZK, Príklad 2.3.21] Nájdite všeobecnú rovnicu nadroviny α v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (2, 2, 4, 4)$ a vektormi $\vec{a} = (0, 1, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1, 0)$.
- 1.2. Pre afinný podpriestor zadaný parametricky nájdite jeho všeobecné vyjadrenie.
 - a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 1 + s, x_2 = 2 + 2s + t, x_3 = 1 + s + t, x_4 = 1 + s - t; s, t \in \mathbb{R}\}$
 - b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + t, x_3 = 1 - t, x_4 = 3 + 3t; t \in \mathbb{R}\}$
 - c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 1 + s + t, x_2 = -1 + s, x_3 = 1 + 3s + t, x_4 = -1 + 3s + 2t; s, t \in \mathbb{R}\}$
 - d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = 1 + s + 2t, x_2 = 1 + 3s + t, x_3 = 1 + 4s + 3t, x_4 = 2s - t; s, t \in \mathbb{R}\}$

2 Vzájomné polohy afinných podpriestorov

Rovnobežné: $V(\alpha) \subseteq V(\beta)$ alebo $V(\beta) \subseteq V(\alpha)$

Rôznobežné: $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) \neq \emptyset$ a súčasne $\mathcal{B}(\alpha) \not\subseteq \mathcal{B}(\beta)$ a $\mathcal{B}(\beta) \not\subseteq \mathcal{B}(\alpha)$

Mimobežné: $\mathcal{B}(\alpha) \cap \mathcal{B}(\beta) = \emptyset$, $V(\alpha) \cap V(\beta) = \{\vec{0}\}$

- 2.1. [HZK, 2.4.53] Zistiť vzájomnú polohu daných afinných podpriestorov v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha &\equiv \begin{cases} x_1 = 3 + u + v \\ x_2 = 4 + u + v \\ x_3 = 5 + u + v \\ x_4 = 5 + u \end{cases} & \beta &\equiv \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 + v \\ x_3 = 5 + u + v \\ x_4 = 6 + u + v \end{cases} \\ \text{b) } \alpha &\equiv \begin{cases} x_1 = 3 + 2u \\ x_2 = 3 + 2u \\ x_3 = 3 + 2u \\ x_4 = 2 + u + v \end{cases} & \beta &\equiv \begin{cases} x_1 = 2 + u + v \\ x_2 = 2 + u + v \\ x_3 = 3 + 2u \\ x_4 = 2 + u - v \end{cases} \end{aligned}$$

- 2.2. Dokážte, že priamka $p \equiv \{x_1 = 0; x_2 = t; x_3 = 1 + t; x_4 = 1 + t\}$ je mimobežná s rovinou $\alpha \equiv \{x_1 = u + v; x_2 = u + v; x_3 = u; x_4 = u - v\}$.
- 2.3. [HZK, 2.4.56] Určte vzájomnú polohu priamky

$$p \equiv \{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3 = 0; x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 2 = 0; 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 - 7 = 0\}$$

a nadroviny $\alpha \equiv 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 20 = 0$.

- 2.4. [HZK, 2.4.58] Určte parametrické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza bodom $A = (1, 0, 2, -1)$, je rovnobežná s rovinou

$$\alpha \equiv \{x_1 = u; x_2 = v; x_3 = u; x_4 = v\}$$

a pretína rovinu

$$\beta \equiv \{x_1 = u; x_2 = u + v; x_3 = -u; x_4 = 1 - v\}.$$

- 2.5. [HZK, 2.4.55] Vyšetrite vzájomnú polohu α a β pre

$$\alpha \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = 1; x_2 = -1 + w; x_3 = 1 + u + w; x_4 = -1 + v + w; x_5 = 1 + u + v + w; u, v, w \in \mathbb{R}\}$$

$$\beta \equiv \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5; x_4 - x_5 + 2 = 0\}$$

a určte parametrické vyjadrenie ich prieniku.

- 2.6. [HZK, 2.4.55] Ukážte, že priamka $p \equiv \{x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + 2t, x_3 = 3 + 3t, x_4 = 4 + 4t\}$ a rovina $\alpha \equiv \{x_1 + x_2 = 0; x_3 - x_4 - 1 = 0\}$ nemajú spoločný ani jeden bod a určte parametrické i analytické vyjadrenie afinného podpriestoru minimálnej dimenzie, ktorá obsahuje α a je rovnobežná s priamkou p .

2.7. Ukážte, že afinné podpriestory $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + t + 2s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 - t - 2s \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 - u + 2v \\ x_3 = 2 + u - 2v \\ x_4 = 1 - u + 2v \end{cases}$

nie sú ani rovnobežné, ani rôznobežné, ani mimobežné.

2.8. Aká je vzájomná poloha afinných podpriestorov α, β ? Nájdite najmenší afinný pod-

priestor obsahujúci α aj β . $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = v \\ x_3 = 1 + u + v \\ x_4 = 2 - u \\ x_5 = -1 + v \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 = 2v \\ x_2 = u + 2v \\ x_3 = 2 + u + 3v \\ x_4 = 3 - v \\ x_5 = -1 + 2u + 3v \end{cases}$

2.9. Nech $(\mathcal{B}_{1,2}, V_{1,2})$ sú afinné podpriestory $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ také, že $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$. Vieme na základe tohoto faktu povedať niečo o ich vzájomnej polohe?

Literatúra

[HZK] Milan Hejný, Valent Zát'ko, and Pavel Kršňák. *Geometria 1*. SPN, Bratislava, 1985.

Prechod medzi súradnicovými systémami

Matica prechodu. Od bázy $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ k báze $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ je taká matica P typu $n \times n$, že platí

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= p_{11}\vec{a}_1 + p_{12}\vec{a}_2 + \dots + p_{1n}\vec{a}_n \\ \vec{b}_2 &= p_{21}\vec{a}_1 + p_{22}\vec{a}_2 + \dots + p_{2n}\vec{a}_n \\ &\vdots \\ \vec{b}_n &= p_{n1}\vec{a}_1 + p_{n2}\vec{a}_2 + \dots + p_{nn}\vec{a}_n\end{aligned}$$

Matica prechodu opačným smerom je P^{-1} .

Zmena súradníc vo vektorovom priestore. Ak $\vec{x}_n$ označuje súradnice vektora v novej báze a $\vec{x}_s$ jeho súradnice v starej báze, tak máme

$$\begin{aligned}\vec{x}_s &= \vec{x}_n P, \\ \vec{x}_n &= \vec{x}_s P^{-1}.\end{aligned}$$

Zmena súradníc v afinnom priestore. Prechod od bázy $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k báze $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ môžeme vyjadriť ako

$$X' = XP^{-1} + B,$$

kde B sú súradnice bodu O v $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$.

Matica P tu označuje maticu prechodu od $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$, t.j. P^{-1} je matica prechodu od $(O', \vec{a}'_1, \dots, \vec{a}'_n)$ k $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

1. [HZK, 2.3.39] V $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sú dané afinné súradnicové sústavy $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ a $(B, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, kde $O = (0, 0, 0)$, $\vec{e}_i$ je i -ty vektor štandardnej bázy a

$$B \equiv (2, 1, 3); \quad \vec{a}_1 = (2, 4, 1); \quad \vec{a}_2 = (0, 4, 4); \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 0).$$

Nájdite rovnice určujúce prechod od súradnicovej sústavy $(B, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ k súradnicovej sústave $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Aké súradnice má bod O a vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ v súradnicovej sústave $(B, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$?

2. Popíšte prechod od afinnej súradnicovej sústavy $(O, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ k $(O', \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ pre

$$\begin{array}{ll} O = (1, 1) & O' = (-1, 2) \\ \vec{a}_1 = (2, 1) & \vec{b}_1 = (-1, 1) \\ \vec{a}_2 = (1, 2) & \vec{b}_2 = (2, 3) \end{array}$$

3. [HZK, 2.3.39] Rovnice

$$y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1; \quad y_2 = x_2 + \dots + x_n + 1; \quad \dots \quad y_n = x_n + 1$$

určujú prechod od súradnicovej sústavy $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ k súradnicovej sústave $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Zistite:

- aké rovnice dávajú prechod od $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ k $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$,
- aké súradnice má bod O' a vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ v $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$,
- aké súradnice má bod O a vektory $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ v $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$,
- aké súradnice má v $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ bod M , ktorý má v $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ súradnice $(1, 1, \dots, 1)$,
- aké súradnice má v $(O', \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ bod M , ktorý má v $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ súradnice $(1, 1, \dots, 1)$.

Literatúra

[HZK] Milan Hejný, Valent Zát'ko, and Pavel Kršňák. *Geometria 1*. SPN, Bratislava, 1985.

1 Vzdialenosť afinných podpriestorov

- 1.1. [P, 1376] Ukážte, že vzdialenosť medzi dvoma afinnými podpriestormi $P_1 = A_1 + V_1$ a $P_2 = A_2 + V_2$ sa rovná dĺžke ortogonálnej projekcie vektora $\overrightarrow{A_1 A_2}$ do priestoru $V^\perp$, kde $V = V_1 + V_2$.
- 1.2. Ukážte, že vzdialenosť medzi dvoma afinnými priestormi $P_1 = A_1 + V_1$ a $P_2 = A_2 + V_2$ sa rovná vzdialenosti bodu A_1 od afinného podpriestoru $A_2 + V$, kde $V = V_1 + V_2$.
- 1.3. [BPC, 34.21] Nájdite vzdialenosť bodu A od priamky l :
- $A = (0, 3, 2, -5)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 1 + t, x_2 = -t, x_3 = 2 + 2t, x_4 = -2 + 2t\}$;
 - $A = (2, -2, 1, 5)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 3 + t, x_2 = -1 + t, x_3 = 2 + t, x_4 = -t\}$;
 - $A = (3, 3, 1, 0, 0)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5; x_1 = 2 + 3t, x_2 = 1 + 2t, x_3 = -t, x_4 = 1 + t, x_5 = -1 - t\}$;
 - $A = (1, -1, -1, 1)$, $l = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0, 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 0\}$.
- [Výsledky: a) 3; b) $2\sqrt{3}$; c) 4; d) $\sqrt{6}$.]
- 1.4. [BPC, 34.23] Nájdite vzdialenosť medzi priamkami l_1 a l_2 :
- $l_1: x_1 = 1 + t, x_2 = -1, x_3 = -t, x_4 = -2 + t$; $l_2: x_1 = 4 + t, x_2 = 2t, x_3 = 1 + t, x_4 = t$
 - $l_1 = \{(2 + t, -1 - 2t, 2 + 2t, 1 - t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(3 - t, 1 + 2t, -1 - 2t, 2 + t); t \in \mathbb{R}\}$;
 - $l_1 = \{(3 + t, 2, t, 3 + t, -t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(1 + 2t, 2t, 1 - t, t, 2); t \in \mathbb{R}\}$;
 - $l_1 = \{(1 + t, 2t, 1 - t, -1 + t, t); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(3 + t, -2t, -1 - t, 1 + t, 2 + t); t \in \mathbb{R}\}$;
 - $l_1 = \{(1 - 2t, 0, t, 1 + t, 2); t \in \mathbb{R}\}$; $l_2 = \{(-1 + t, -1 + t, 0, 1, -2 - t); t \in \mathbb{R}\}$;
- [Výsledky: a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) 4]
- 1.5. Vypočítajte vzdialenosť bodu $A = (0, 2, 1, 0)$ od roviny $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = 1 - v \\ x_3 = 1 - u \\ x_4 = v \end{cases}$ a jeho kolmý priemet. [Výsledok: $A^\perp = (-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$]
- 1.6. Nájdite priamku q , ktorá je rovnobežná s priamkou $p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 3x_1 + 4x_2 - 1 = 0\}$, a platí pre ňu $\varrho(S, q) = 1$, kde $S = (2, 1)$.
- 1.7. Nech $p = \{(x_1, x_2); x_1 = -1 + t, x_2 = 3 - t, t \in \mathbb{R}\}$, $\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 7x_1 + x_2 = 0\}$, $\beta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 - x_2 + 8 = 0\}$. Nájdite bod $P \in p$ taký, že $\varrho(P, \alpha) = \varrho(P, \beta)$. [Výsledok: $P = (-3, 5)$, $P = (-1, 3)$]
- 1.8. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = 3u + v \\ x_2 = 1 + 2u + v \\ x_3 = -4u - 2v \\ x_4 = 2 + u + v \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$ $\varrho(\alpha, \beta) = ?$ [Výsledok: $\frac{\sqrt{10}}{2}$]
- 1.9. Zistite vzdialenosť afinných podpriestorov $p = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = t, x_2 = 1 + t, x_3 = t, x_4 = -t, x_5 = t, t \in \mathbb{R}\}$ a $\beta = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5); x_1 = v, x_2 = u, x_3 = -u, x_4 = v, x_5 = -u, u, v \in \mathbb{R}\}$. [Výsledok: $\frac{\sqrt{14}}{7}$]
- 1.10. [S, 1375] Nájsť vzdialenosť medzi priamkou l a rovinou P ak:
- $l = (9, -2, -1, -1) + [(2, -2, -1, -1)]$; $P = (2, 1, 3, -3) + [(3, -2, 2, 0), (-5, 2, 0, 2)]$;
 - $l = (2, 4, 0, 14) + [(0, 1, -2, 5)]$; $P = (4, 1, -2, 5) + [(-1, 1, -1, 5), (1, 1, -3, 3)]$.
- [Výsledky: a) $\frac{27}{5}$; b) $\sqrt{6}$]
- 1.11. [S, 1376] Nájdite vzdialenosť medzi priamkou l a rovinou P , ak:
- $l = (9, -2, -1, -1) + [(2, -2, -1, -1)]$; $P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; 2x + 4y + z + t =$

- $8, 2x + 7y + 4z - 2t = 29\}$;
 b) $l = (2, -3, 1, -4) + [(-1, 2, 1, 1)]$; $P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + 12t = 19, 5x + 2y - 7z - 6t = -7\}$;
 c) $l = (2, 4, 0, 14) + [(0, 1, -2, 5)]$; $P = \{(x, y, z, y) \in \mathbb{R}^4; 2x - 2y + z + t = 9, 4x + 2y + 3z + t = 17\}$;
 Výsledky: a) $27/5$, b) $\sqrt{13}$, c) $\sqrt{6}$
 1.12. [P, 1377] Nájdite vzdialenosť dvoch rovín v $\mathbb{R}^4$ ak jedna z nich je určená bodom $X = (4, 5, 3, 2)$ a vektormi $\vec{a} = (1, 2, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -2, 1, 2)$, druhá je určená bodom $Y = (1, -2, 1, -3)$ a vektormi $\vec{c} = (2, 0, 2, 1)$, $\vec{d} = (1, -2, 0, -1)$.
 1.13. Nájdite vzdialenosť zadaných afinných podpriestorov $\mathbb{R}^4$:
 a) priamka $p = \{(2 + t, 1 + t, 2 + 2t, -2); t \in \mathbb{R}\}$ a rovina $\alpha = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2\}$ v $\mathbb{R}^4$;

2 Uhly, kolmost'

- 2.1. Nech $A = (7, -4, -1, 2)$ a $\alpha \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ Nájdite $A^\perp$. [Výsledok: $A^\perp = (5, -5, -2, -1)$]
 2.2. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0 \end{cases}$ $p \equiv \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 + 2t \end{cases}$
 Nájdite priamku q takú, že $(0, 0, 0, 0) \in q$, $q \perp p$ a $q \perp \alpha$. [Výsledok: $q = \{(11u, 3u, -4u, 4u); u \in \mathbb{R}\}$]
 2.3. Nech $P = (1, -1, 2, 1)$
 $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2 = 0 \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 + u + v \\ x_3 = -u \\ x_4 = 1 - v \end{cases}$
 Nájdite priamku p takú, že $P \in p$, $p \perp \alpha$ a p pretína β .
 2.4. $\alpha \equiv \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 1 + v \\ x_3 = v \\ x_4 = v \\ x_5 = u \end{cases}$ $\beta \equiv \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - 1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ Nájdite rovinu γ takú, že $\gamma \supseteq \alpha$ a $\gamma \perp \beta$. (Akú dimenziu môže mať afinný podpriestor γ , ak má spĺňať tieto 2 podmienky?)

Literatúra

- [BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sbornik zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algebre*. Fizmatlit, 2004.
 [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.

- [S] Yu. M. Smirnov. *Sbornik zadach po analiticheskoi geometrii i linejnoj algebre*. Golos, Moskva, 2005.

1 Metóda najmenších štvorcov

Približné riešenie sústav: Ak $AX = B$ nemá riešenie, môžeme sa snažiť hľadať *približné* riešenie, ktoré minimalizuje vzdialenosť $|AX - B|$.

[L, Theorem 6.5.13]: Hľadať približné riešenia je to isté, ako hľadať riešenia sústavy $A^T AX = A^T B$.

1.1. Metódou najmenších štvorcov nájdite približné riešenie systému $A \cdot X = B$, kde:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ¹

1.2. Metódou najmenších štvorcov nájdite priamku, ktorá aproximuje zadané dáta:

a) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1), (y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 4)$

b) $(x_1, \dots, x_4) = (-1, 0, 1, 2), (y_1, \dots, y_4) = (-1, 0, 0, 1)$

c) $(x_1, \dots, x_4) = (0, 1, 2, 3), (y_1, \dots, y_4) = (1, 1, 2, 3)$

d) $(x_1, \dots, x_5) = (-2, -1, 0, 1, 2), (y_1, \dots, y_5) = (-2, 0, 2, 0, 3)$

e) $(x_1, \dots, x_5) = (-2, 1, 0, 1, 2), (y_1, \dots, y_5) = (-1, -1, 1, 2, 4)$

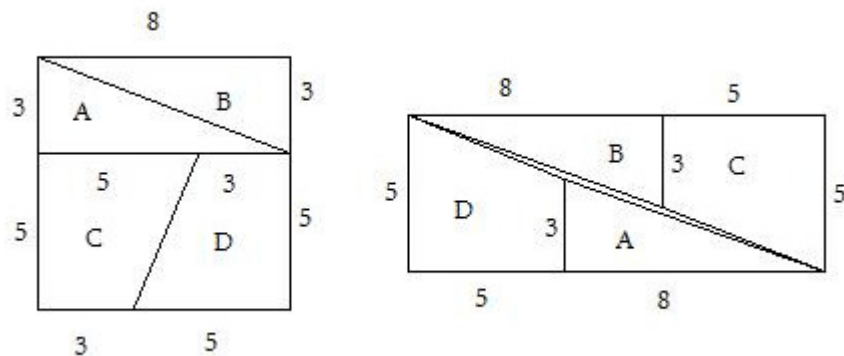
f) $(x_1, \dots, x_4) = (0, 1, 2, 3), (y_1, \dots, y_4) = (1, 1, 2, 2)$ ²

Literatúra

[L] David C. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. Addison-Wesley, Boston, 4th edition, 2012.

¹Riešenie úlohy c) sa dá pozrieť aj na fóre: <https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1429>

²Riešenie úlohy f) sa dá pozrieť aj na fóre: <https://msleziak.com/forum/viewtopic.php?t=1433>



Obr. 1: Cassiniho identita.

1 Fibonacciho postupnosť

Fibonacciho postupnosť je určená rekurentným predpisom

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (1)$$

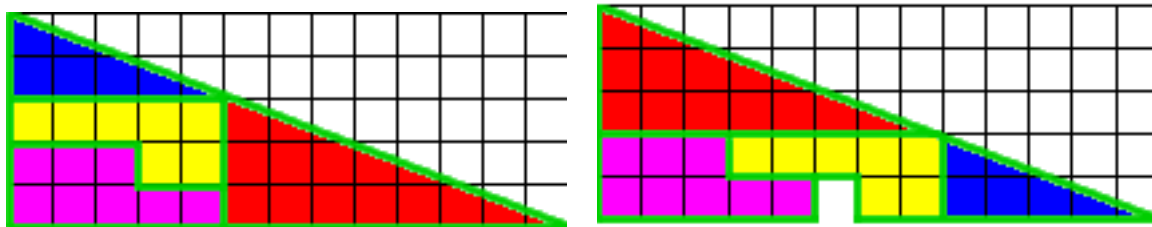
a počiatočnými hodnotami $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

1.1. Ukážte, že pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ platí

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- 1.2. Dal by sa pomocou (2) nájsť algoritmus na výpočet n -tého Fibonacciho čísla, ktorý je efektívnejší ako postupné počítanie $F_1, F_2, \dots, F_n$ na základe rekurencie $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.
- 1.3. Skontrolujte, že pre túto maticu platí $A^2 = A + I$. Vedeli by ste z toho dostať, že platí $A^{-1} = A - I$?
- 1.4. Ukážte pomocou (2):
 - a) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (Cassiniho identita)
 - b) $F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$ (konvolučná vlastnosť) ¹
 - c) $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ a $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.
- 1.5. Dokážte, že $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$.
- 1.6. Dokážte, že $\sum_{k=0}^n F_{2k+1} = F_{2(n+1)}$ a $\sum_{k=0}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
- 1.7. Ukážte, že $\sum_{k=0}^n F_k^2 = F_nF_{n+1}$. (Hint k maticovému odvodeniu: Čomu sa rovná $(A^k)^2$? Iná možnosť: Použiť nejako $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.)
- 1.8. Ukážte, že $F_{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k$. (Hint k maticovému odvodeniu: Skúste využiť rovnosť $A^2 = I + A$.)
- 1.9. Označme ako $\varphi_{1,2}$ korene polynómu $x^2 - x - 1$. (T.j. $\varphi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ a platí $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -1$.) Ukážte, že matice $A - \varphi_{1,2}I$ sú singulárne. Nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = \varphi_{1,2}\vec{x}$. (T.j. v terminológii, ktorá zanedlho bude na prednáške, sme skontrolovali, že φ_1 a φ_2 sú vlastné hodnoty a našli sme k nim zodpovedajúce vlastné vektory.)

¹Túto vec ste stretli na diskretnéj matematike ako cvičenie na indukciu: <http://thales.doa.fmph.uniba.sk/niepel/dismat22/du02.pdf>



Obr. 2: Missing square puzzle

- 1.10. Skontrolujte, že ak P je matica, ktorej riadky sú nenulové vektory $\vec{x}_{1,2}$ také, že $\vec{x}_i A = \varphi_i A$ a $D = \text{diag}(\varphi_1, \varphi_2)$, tak platí $PA = DP$. (Z toho dostávame aj $A = P^{-1}AD$. Potom vieme vyjadriť aj $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = P^{-1}D^n P$, z čoho vidíme aj to, že $F_n = c_1 \varphi_1^n + c_2 \varphi_2^n$ pre nejaké konštanty $c_{1,2}$.)
- 1.11. Nájdite reálne čísla $c_{1,2}$ také, že $F_n = c_1 \varphi_1^n + c_2 \varphi_2^n$; takto by sa mali dostať Binetovu formulu:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \quad (3)$$

- 1.12. Z Cassiniho identity vidíme, že $\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n-1}}$. Vieme na základe toho (alebo na základe nejakého iného argumentu) zdôvodniť existenciu limity $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$? Čomu sa táto limita rovná?

2 Podobnosť matíc

Na prednáške ste zatiaľ ešte iba začali kapitolu o podobnosti.

- 2.1. a) Nájdite možné predpisy postupností (x_n) , (y_n) pre ktoré platí:

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n$$

(Hint: Pomôže pozrieť sa na postupnosti $a_n = x_n + y_n$ a $b_n = x_n - y_n$?)

- b) Nájdite možné predpisy postupností (x_n) , (y_n) pre ktoré platí:

$$x_{n+1} = 3x_n - 4y_n$$

$$y_{n+1} = 2x_n - 3y_n$$

- 2.2. a) Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = \vec{x}$ a všetky vektory také, že $\vec{x}A = 3\vec{x}$.
- b) Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = \vec{x}$ a všetky vektory také, že $\vec{x}A = -\vec{x}$.
- c) Súvisia veci z tejto úlohy s riešením predošlej úlohy o rekurenciách? ²

²Toto súvisí s pojmom *vlastného vektora* a *vlastnej hodnoty* – oba budú na najbližšej prednáške.

- 2.3. a) Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad poľom $\mathbb{R}$ nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = -2\vec{x}$ resp. $\vec{x}A = 3\vec{x}$.
 b) Nech P je matica 2×2 , ktorá má ako riadky nejaké nenulové vektory také, že $\vec{x}_1A = -2\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2A = 3\vec{x}_2$. Skontrolujte, že pre diagonálnu maticu $D = \text{diag}(-2, 3)$ platí $PA = DP$. (Toto je ekvivalentné s $PAP^{-1} = D$, teda A je podobná s diagonálnou maticou D .)
 c) Skontrolujte, že zobrazenie $f: \vec{x} \mapsto \vec{x}A$ má vzhľadom na bázu $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ maticu $M_{f, \langle \vec{x}_i \rangle} = D$. (Teda pri tejto báze sa táto lineárna transformácia dá vyjadriť diagonálnou maticou.)
- 2.4. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ nájdite všetky vektory také, že $\vec{x}A = \vec{x}$; všetky vektory také, že $\vec{x}A = 2\vec{x}$ a všetky vektory také, že $\vec{x}A = 4\vec{x}$.
 b) Nech P je matica 3×3 , ktorá má ako riadky nenulové vektory také, že $\vec{x}_1A = \vec{x}_1$, $\vec{x}_2A = 2\vec{x}_2$ a $\vec{x}_3A = 4\vec{x}_3$.
- 2.5. Nech $A, B \in M_{n,n}(F)$. Hovoríme, že A a B sú podobné, ak existuje regulárna matica P taká, že $B = PAP^{-1}$. Dokážte, že podobnosť matíc je relácia ekvivalencie.
- 2.6. Nech $A \in M_{n,n}(F)$. Ukážte, že existuje polynóm $p(x)$ stupňa najvyššieho n^2 taký, že $p(A) = 0$. T.j. ak $p(x) = c_kx^k + \dots + c_1x + c_0$, tak

$$p(A) = c_kA^k + \dots + c_1A + c_0I = 0.$$

(Napríklad pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sme videli, že platí $A^2 - A - I = 0$. Neskôr na prednáške budeme vidieť, že stačí polynóm stupňa n ; dokážeme *Cayley–Hamiltonovu vetu*, ktorá hovorí, že takáto vec platí pre charakteristický polynóm matice A .)

Literatúra

1 Podobnosť matíc

Matice A a B sú *podobné* $\Leftrightarrow$ existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = B$. Táto podmienka je ekvivalentná s tým, že A aj B predstavujú maticu toho istého zobrazenia v dvoch rôznych bázach. (Konkrétne, ak A je matica nejakého zobrazenia pri štandardnej báze, tak $B = PAP^{-1}$ je matica toho istého zobrazenia pri báze určenej riadkami matice P .)

Ak $\lambda \vec{v} = \vec{v}A$, kde $\vec{v} \neq \vec{0}$, tak $\vec{v}$ je *vlastný vektor* matice A a λ je *vlastná hodnota* (*vlastné číslo*) matice A . Ekvivalentne: λ je vlastná hodnota práve vtedy, keď matica $A - \lambda I$ je singulárna.

Vlastné hodnoty sú presne korene *charakteristického polynómu* $\chi_A(t) = \det(tI - A)$ matice A . Ak ich počítame s algebraickou násobnosťou,¹ tak máme:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\ \det(A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n\end{aligned}$$

a súčasne stopa a determinant súvisia aj s príslušnými koeficientami charakteristického polynómu. Špeciálne pre maticu 2×2 máme $\chi_A(t) = t^2 - \text{Tr}(A)t + \det(A)$.

Podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm (a teda aj rovnakú stopu, determinant, vlastné čísla).

Pri hľadaní koreňov charakteristického polynómu je užitočné vedieť, že ak $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ je polynóm s vedúcim koeficientom 1, ktorý má navyše *celočíselné* koeficienty, tak každý *celočíselný* koreň je deliteľom absolútneho člena a_0 .

Matica typu $n \times n$ je podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď jej vlastné vektory tvoria bázu priestoru F^n . Matice P a D také, že $PAP^{-1} = D$, kde P je regulárna a D je diagonálna, dostaneme tak, že D má na diagonále vlastné čísla a P má ako riadky (v rovnakom poradí) vlastné vektory.

Jordanov normálny tvar. Každá matica nad $\mathbb{C}$ je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- 1.1. Vypočítajte charakteristický polynóm a vlastné hodnoty daných matíc. Zistite, či dané matice sú podobné:

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;

b) [P, 1067] $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{pmatrix}$

- 1.2. [P, 1064] Zistite, či matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$ sú podobné.

- 1.3. Nájdite diagonálnu maticu podobnú s danou maticou:

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nad poľom $\mathbb{Q}$;

¹t.j. ak $\chi_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vlastné čísla sú: $-5, 1$. b) Vlastné čísla sú $\pm\sqrt{2}$.

1.4. Musia byť matice, ktoré majú rovnaké vlastné čísla, podobné?

1.5. Dokážte, že ak A a B sú podobné, tak sú podobné aj matice $A - cI$ a $B - cI$ (pre ľubovoľné $c \in F$).

1.6. [P, 1051] Nech φ je ľubovoľná permutácia množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Dokážte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} a_{\varphi(1)\varphi(1)} & a_{\varphi(1)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(1)\varphi(n)} \\ a_{\varphi(2)\varphi(1)} & a_{\varphi(2)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(2)\varphi(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\varphi(n)\varphi(1)} & a_{\varphi(n)\varphi(2)} & \dots & a_{\varphi(n)\varphi(n)} \end{pmatrix}$$

sú podobné.

1.7. Zistite pre aké hodnoty parametrov $a, b, c \in \mathbb{C}$ je daná matica (nad $\mathbb{C}$) podobná s diagonálnou maticou.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; c) \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix};$$

2 Vlastné čísla, vlastné vektory

2.1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory nad poľom $\mathbb{C}$.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, b) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, d) \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}, e) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla sú: a) $-2, 7$; b) $3 \pm 2i$; c) $-3, 2$; d) $-2, 3$; e) $2, 2 \pm \sqrt{2}$

2.2. Nájdite regulárnu maticu P a diagonálnu maticu D také, že platí $PAP^{-1} = D$. (Alebo zdôvodnite, že také matice neexistujú.)

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad c) A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 13 \\ -2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad e) A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -18 \\ 14 & 1 & -18 \\ 10 & 2 & -15 \end{pmatrix} \quad f) A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad g) A =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledky: a) Nie je podobná s diagonálnou maticou; $\chi_A(t) = (x-2)^2(t+4)$. b) $D = \text{diag}(3, 3, 5)$ c) $D = \text{diag}(0, 2, 4)$ d) $D = \text{diag}(1, 1, 2)$ e) $D = \text{diag}(3, -1, -3)$ f) $D = \text{diag}(-5, 3, 6)$ g) $D = \text{diag}(1, 1, -2)$

2.3. Ukážte, že matica A je singulárna práve vtedy, keď 0 je jej vlastné číslo.

2.4. Ukážte, že ak A je regulárna, tak matice A a A^{-1} majú rovnaké vlastné vektory. Čo viete povedať o vlastných hodnotách?

2.5. Nech A je matica typu $n \times k$ a B je matica typu $k \times n$. Ukážte, že:

a) Nenulové vlastné hodnoty matíc AB a BA sú rovnaké.

b) Platilo by tvrdenie z predošlej časti po vynechaní slova nenulové?

c) Ak $k = n$, tak matice AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

2.6. [K, 4005] Ukážte, že ak každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je vlastným vektorom matice A , tak $A = cI$ pre nejaké $c \in \mathbb{R}$.

2.7. Aké matice sú podobné s maticou I ? Aké matice sú podobné s nulovou maticou?

- 2.8. Nech A je matica $n \times n$ nad poľom $\mathbb{C}$ taká, že pre každú regulárnu maticu $n \times n$ platí $PAP^{-1} = A$. Ukážte, že potom $A = cI$ pre nejaké $c \in \mathbb{C}$. (Inak povedané, týmto sme charakterizujeme také matice, že A je podobná sama so sebou a už so žiadnou inou maticou. T.j. trieda ekvivalencie tejto matice pri relácii „podobnosť matíc“ je jednoprvková.)
- 2.9. Nech A je štvorcová matica nad poľom $\mathbb{C}$ taká, že 1 nie je jej vlastná hodnota. Ukážte, že ak $A^n = I$, tak $A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I = 0$.
- 2.10. Nájdite maticu 3×3 , ktorej vlastné čísla sú 1, 2, 3 a táto matica má aspoň sedem nenulových prvkov.
- 2.11. Nech $A \in M_{n,n}(F)$, $\vec{x} \in F^n$ a pre $\lambda \in F$ platí $\vec{x}A = \lambda\vec{x}$. Nech $p(t)$ je ľubovoľný polynóm nad poľom F . Dokážte, že potom platí aj $\vec{x}p(A) = p(\lambda)\vec{x}$.

3 Charakteristický a minimálny polynóm

- 3.1. Ukážte, že podobné matice majú rovnaký charakteristický aj minimálny polynóm. Dá sa na základe toho usúdiť, že majú aj rovnaký determinant a stopu?
- 3.2. * Dokážte, že každé vlastné číslo matice A je koreňom jej minimálneho polynómu $m_A(x)$.
- 3.3. Ak viete, že charakteristický polynóm matice A je $\chi_A(x) = x^2 + 4x - 5$, ako vyzerá charakteristický polynóm matice A^2 .
- 3.4. Nech A je matica typu $n \times 2$ a B je matica typu $2 \times n$. Dokážte, že ak $(AB)^2 = 0$, tak aj $(BA)^2 = 0$. (Hint: Čo viete povedať o vlastných hodnotách matice BA , prípadne o jej minimálnom či charakteristickom polynóme.)
- 3.5. Nech $A = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ a $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, platí $3a_n + b_n + 3c_n + 4d_n = 7$. (Niekoľko hintov – každý vedie k inému riešeniu. Hint 1: Ak nájdete riadkové a stĺpcové vlastné vektory tejto matice, čo viete o $\vec{r}A^n$ a $A^n\vec{c}^T$? Hint 2: Vedeli by ste nájsť P_n a Q_n také, že $A^n = P_nA + Q_nI$? Hint 3: Asi by ste mali byť schopní nájsť aj všeobecné vyjadrenie pre a_n, b_n, c_n, d_n – aj keď takýto postup je asi zdĺhavejší než postupy spomenuté v predošlých dvoch hintoch.)
- 3.6. Budeme uvažovať o reálnych a komplexných maticiach takých, že

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

- a) Ukážte, že ak $x_{1,2,3} \in \mathbb{R}$, tak z podmienky (1) vyplýva $x_1 = x_2 = x_3$.
- b) Ukážte, že existujú komplexné matice také, že platí (1) a súčasne x_1, x_2, x_3 nie sú rovnaké.

4 Súčasná diagonalizácia*

- 4.1. Nech pre matice A, B existuje regulárna matica P taká, že $PAP^{-1} = D_1$ aj $PAP^{-1} = D_2$ sú diagonálne matice. Ukážte, že $AB = BA$, t.j. matice A, B komutujú.
- 4.2*. Zistite, či pre dané matice A, B existuje regulárna matica P taká, že PAP^{-1} aj PBP^{-1} sú diagonálne:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Literatúra

- [K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry*. OPA, Amsterdam, 1996.
- [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.

Jordanov tvar

Jordanov normálny tvar. Každá štvorcová matica nad $\mathbb{C}$ je podobná s blokovo-diagonálnou maticou pozostávajúcou z blokov tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Počet lineárne nezávislých vlastných vektorov k λ určuje počet blokov, ktoré prislúchajú k λ .

Veľkosti blokov by sme mohli nájsť tak, že hľadáme *zovšeobecnené vlastné vektory*, t.j. vektory také, že $\vec{x}(A - \lambda I)^k = \vec{0}$.

Môžeme ich zistiť aj pomocou hodnosti mocnín matice $(A - \lambda I)$: Počet blokov (pre vlastnú hodnotu λ) veľkosti aspoň k je $h((A - \lambda I)^{k-1}) - h((A - \lambda I)^k)$.

Pretože matice A a jej Jordanov tvar J sú podobné, budú mať rovnaký minimálny polynóm aj charakteristický polynóm, hodnot, stopu a determinant.

Ak nie je zadané inak, vo všetkých úlohách pracujeme s maticami nad $\mathbb{C}$.

1. Nájdite k -tu mocninu zadanej matice pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Vedeli by ste výsledok zovšeobecniť na ľubovoľné rozmery? (T.j. na matice rozmerov $n \times n$ namiesto 4×4 .)

2. [K, Exercise 4101] Nájdite Jordanov tvar danej matice:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Riešenia: a) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Nájdite Jordanov tvar, charakteristický polynóm a minimálny polynóm danej matice:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -23 & 21 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Riešenia: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e)

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. [P, 1090–1093] Nájdite Jordanov tvar, charakteristický polynóm a minimálny polynóm danej matice:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Riešenia: a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Ak viete, že matica A má Jordanov tvar J , dá sa na základe toho odpovedať na zadané otázky?

a) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Čomu sa rovná charakteristický polynóm $\chi_A(x)$ a minimálny

polynóm $m_A(x)$ matice A ?

b) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Čomu sa rovná $h(A-I)$, $h((A-I)^2)$, $h((A-I)^3)$, $h((A-I)^4)$?

c) $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Je matica A regulárna? Viete nájsť vyjadrenie matice A^{-1}

v tvare $p(A)$, kde p je nejaký polynóm? Vedeli by ste nájsť také vyjadrenie, kde polynóm p je najnižšieho možného stupňa?

d) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; Je matica A podobná s maticou $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

6. Ak má matica uvedené vlastnosti dá sa z nich už jednoznačne určiť Jordanov tvar matice A ? Ak je viacero možností pre Jordanov tvar, nájdite všetky.

- a) Matica A je rozmerov 4×4 a jej minimálny polynóm je $m_A(x) = (x - 2)^2(x - 1)$.
- b) $\chi_A(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ a $m_A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
- c) Matica A rozmerov 4×4 je singulárna a $h(A - 2I) = 1$.
- d) Pre maticu A rozmerov 4×4 platí $h(A - 2I) = 2$ a $h((A - 2I)^2) = 0$, pričom 2 je jediné vlastné číslo matice A .
- 7. Ukážte, že ľubovoľná štvorcová matica A je podobná s transponovanou maticou A^T .
(Hint: Najprv to skúste overiť pre maticu, ktorá je v Jordanovom tvare.)
- 8. Čomu sa rovná A^{30} pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

(Dá sa nejako využiť Jordanov tvar? Vedeli by ste úlohu vyriešiť aj bez použitia Jordanovho tvaru?)

Literatúra

- [K] A. I. Kostrikin. *Exercises in Algebra: A collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry*. OPA, Amsterdam, 1996.
- [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.

1 Kvadratické formy

Kanonický tvar. Lubovoľná kvadratická forma sa dá previesť zámenou premenných na kanonický tvar. Maticovo to môžeme vyjadriť tak, že ľubovoľná symetrická matica je kongruentná s diagonálnou maticou $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ takou, že $d_i \in \{0, \pm 1\}$ pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Kladná definitnosť.

- Reálna symetrická matica A je kladne definitná, ak pre každé $\vec{x} \neq \vec{0}$ platí $\vec{x}A\vec{x}^T > 0$.
- Kladne definitné sú presne tie matice, ktorých kanonický tvar má na diagonále iba jednotky. T.j. matice tvaru $A = PP^T$.
- Sylvestrovo kritérium: Matica A je kladne definitná $\Leftrightarrow$ všetky rohové determinanty sú kladné, t.j. $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n = |A| > 0$.

Ortogonalna podobnosť.

- Matica A je ortogonalna $\Leftrightarrow AA^T = I$, t.j. $A^T = A^{-1}$. To platí práve vtedy, keď riadky (stĺpce) tvoria ortonormálnu bázu.
- Pre ľubovoľnú reálnu symetrickú maticu A existujú ortogonalna matica P a diagonálna matica D tak, že

$$PAP^T = PAP^{-1} = D.$$

- Ak A je reálna symetrická matica, tak vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám sú na seba kolmé.

1.1. Nájdite kanonický tvar danej kvadratickej formy a transformáciu premenných, ktorá ju prevedie na kanonický tvar.

- $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$
- $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$
- $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$
- $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$
- $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$
- $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$
- $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$
- $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2$

Riešenia: a), b), f), h) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; c) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; d) $y_1^2 - y_2^2$; e) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; g) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; j) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$; (Transformáciu premenných som sem nedával – tá nie je určená jednoznačne.)

1.2*. [FS, 528] Preveďte kvadratickú formu $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} x_i x_k$ na diagonálny tvar.

$$[\text{Výsledok: } y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2; P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}]$$

(Toto samozrejme nie je jediná možnosť.)

1.3*. [FS, 529] Preveďte kvadratickú formu $\sum_{1 \leq i < k \leq n} x_i x_k$ na diagonálny tvar.

1.4. Zistite, či predpis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}A\vec{y}^T$ predstavuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.5. Zistite, či daná matica je kladne definitná.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Nie. b) Áno.

1.6. Pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ je daná kvadratická forma kladne definitná.

- a) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$
 b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
 c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$
 d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Odpovede: a) $|a| < \sqrt{\frac{5}{3}}$, b) $-\frac{4}{5} < a < 0$, c), d) pre žiadne a

1.7. Pre danú kvadratickú formu určte tie hodnoty parametra $t \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kladne definitná.

- a) $5x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3$
 b) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$
 c) $\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_2^2 - 3tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3 + 2x_1x_3$
 d) $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3) + t(6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2) + t^2(x_1^2 + x_2^2)$

(Poznámka: Niekedy sa výpočet determinantov $D_1, D_2, \dots$ môže zjednodušiť, ak zmeníte poradie premenných. Takáto zmena neovplyvní to, či je matica kladne definitná.)

1.8. Nech A je symetrická reálna matica taká, že $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$. (Determinanty $D_1, \dots, D_n$ označujú rohové determinanty vystupujúce v Sylvestrovom kritériu.) Dokážte, že potom $a_{nn} > 0$.

1.9. Nech V je euklidovský vektorový priestor a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in V$. Definujme maticu $A = \|a_{ij}\|$ tak, že $a_{ij} = \langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle$. (Táto matica sa zvykne volať *Gramova matica*.) Dokážte, že $|A| \geq 0$ a že tieto vektory sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $|A| > 0$.

1.10. [P, 1201, 1202] Pre ktoré z uvedených kvadratických foriem existuje regulárna transformácia premenných, ktorá prevedie jednu z nich na druhú?

- a) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3; f_2 = y_1y_2 - y_3^2; f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;
 b) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3; f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$;
 $f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$

1.11. Z údajov ktoré sú zadané o reálnej symetrickej matici A zistite, ako vyzerá kanonický tvar príslušnej kvadratickej formy. (Dali by sa tieto úvahy použiť na zistenie kanonického tvaru pre niektoré kvadratické formy z predošlých príkladov?)

- a) Matica A je *kladne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.
 b) Matica A je *záporne definitná* symetrická matica rozmerov $n \times n$.
 c) A je nenulová symetrická matica rozmerov 3×3 , ktorá má nulovú stopu aj determinant, t.j. $\det(A) = \text{Tr}(A) = 0$.

1.12. Pre danú symetrickú maticu A nájdite diagonálnu maticu D a *ortogonálnu* maticu P také, že platí $PAP^T = D$.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ d) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \\ \text{e) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \text{ f) } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ g) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ h) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \\ \text{i) } A &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \text{ j) } A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Výsledky: a) $\text{diag}(0, 4, 10)$; b) $\text{diag}(-1, -1, 2)$; c) $\text{diag}(1, 1, -1)$; d) $\text{diag}(-1, -1, 5)$; e)

- diag(0, 0, 6); f) diag(-3, -3, 3); g) diag(-1, -1, 5); h) diag(0, 5, 12); i) diag(-3, -4, 6); j) diag(-5, -5, 16);
- 1.13. Nájdite (ak taká matica existuje) ortogonálnu maticu P takú, že $PAP^T = D$ je diagonálna matica.
- a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
- e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
- f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
- g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
- i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
- j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- k) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2 Nerovnosti*

- 2.1. Nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu danej funkcie na množine M . (Prípadne sa môžete pokúsiť nájsť aj v akom bode sa maximum a minimum nadobúda.)
- a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$; $M = \mathbb{R}^2$
- b) $f(x, y) = xy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
- c) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
- d) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
- e) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;
- f) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ (Hint: Táto úloha sa dá riešiť pomocou kvadratických foriem. Možno však kratšie riešenie nájdete použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti alebo niektorých iných nerovností, ktoré už poznáte.)
- g) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$;
- h) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1\}$;

Literatúra

- [FS] D. K. Faddeev and I. C. Sominskii. *Zadachi po vysšej algebre*. Laň, St. Peterburg, 1999.
- [P] I. V. Proskurjakov. *Sbornik zadač po lineinoi algebre*. Binom, Moskva, 9 izd. edition, 2005.

Kuželosečky

Chceli by sme zopakovať nejaké základné (v podstate stredoškolské) veci o kuželosečkách.¹

Dôležité je najmä to, aby ste vedeli z rovnice rozoznať typ krivky a aj ju načrtnúť. Ostatné informácie, čo sú tu spomenuté (ako dotyčnice, súradnice ohnisk, parametrizácia), berte ako niečo „navyš“ – na tomto predmete to zrejme potrebovať nebudete.

Literatúra: [ŠBP], [BPC].

Kružnica. Rovnica kružnice so stredom v bode $(0, 0)$ a polomerom r : $x^2 + y^2 = r^2$

Parametrizácia: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

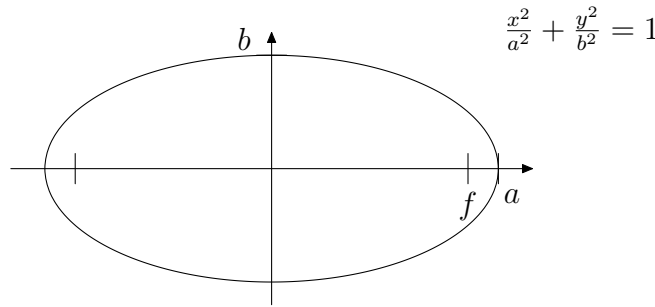
Stred v bode (m, n) : $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Dotyčnica v bode (x_0, y_0) má normálový vektor (x_0, y_0) : $xx_0 + yy_0 = r^2$.

Elipsa. Elipsa je množina bodov, pre ktoré je súčet vzdialeností od zadaných dvoch bodov (ohnísk) konštantný. Rovnica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

predstavuje elipsu so stredom v bode $(0, 0)$ a s hlavnými poloosami dĺžok a , b .



Obr. 1: Elipsa s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a ohniskami $(0 \pm f)$

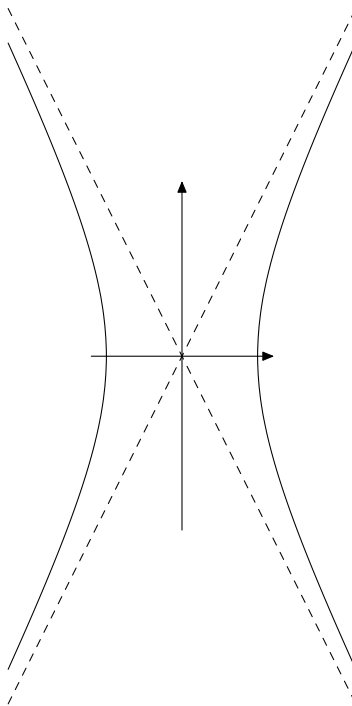
rovnica	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
parametrizácia	$x = a \cos t$, $y = b \sin t$
súradnice ohnisk	$(0, \pm f)$ pre $f = \sqrt{a^2 - b^2}$
dotyčnica v (x_0, y_0)	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Hyperbola. Hyperbola je množina bodov, pre ktoré je rozdiel vzdialeností od zadaných dvoch bodov (ohnísk) konštantný.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rovnica	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
asymptoty	$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$
parametrizácia	$x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$
ohniská	$(0, \pm f)$ pre $f = \sqrt{a^2 + b^2}$
dotyčnica v (x_0, y_0)	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

¹Kuželosečkami ich voláme preto, že sú to presne krivky, ktoré vieme dostať ako prienik roviny s kuželom.



Obr. 2: Hyperbola s rovnicou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a asymptotami $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$

S funkciami $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ a $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (hyperbolický sínus a kosínus), ktorými sa hyperbola dá parametricky vyjadriť, sa možno stretnete na matematickej analýze.²

Parabola. Parabola s ohniskom F je a určujúcou priamkou d (pričom $F \notin d$) je množina bodov, pre ktoré je vzdialenosť od priamky d a bodu F rovnaká, t.j. $|XF| = |Xd|$.

$$2py = x^2$$

rovnica	$2py = x^2$
ohnisko	$(0, \frac{p}{2})$
určujúca priamka	$y = -\frac{p}{2}$
dotyčnica v (x_0, y_0)	$p(y + y_0) = xx_0$

1. Nakreslite množinu bodov určenú zadanou rovnicou/rovniciami/nerovnicami:

- $x^2 + y^2 \leq 2$;
- $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,
- $4x^2 + 9y^2 = 36$,
- $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$;
- $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;
- $x^2 + 9y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$;

²Pre tieto funkcie platí $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\cosh' x = \sinh x$ a $\sinh' x = \cosh x$. Niekedy sa dajú použiť pri výpočte integrálov pomocou substitúcie. Podobne ako substitúcia $u = a \sin x$ býva často užitočná, ak rátate nejaký integrál obsahujúci výraz $\sqrt{a^2 - x^2}$, tak sa dá často použiť substitúcia $u = a \sinh t$ ak integrál obsahuje výraz $\sqrt{a^2 + x^2}$.

- h) $y = 5 - 4x - x^2$;
 i) $5x^2 - 4y^2 + 20x - 48y + 1 = 0$
2. Nakreslite množinu bodov určenú podmienkami:
- a) $x^2 + y^2 - 4y = 5$;
 b) $x^2 + 2x + 2y^2 - 8y = 4$;
 c) $x^2 + y^2 + 3x < 0, y < 0$;
 d) $4x^2 - 4x + 9y^2 + 6y + 1 < 0$;
 e) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \geq 1$;
 f*) $x, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 2$ (Hint: Môže pomôcť po úprave sa pozrieť na výsledok v súradnicovej sústave otočenej o $\pi/4$.)
 g) $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} < 6$;
 h) $\left| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} \right| < 1$;
 i) $y^2 - 9x^2 = 9$
3. Napíšte rovnicu daného útvaru:
- a) Kružnica so stredom v bode $(0, 1)$ a polomerom 2.
 b) Dotyčnica ku kružnici $(x-1)^2 + y^2 = 25$ prechádzajúca bodom $(4, 4)$.
 c) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (3, 0)$, $B \equiv (2, -2)$, $C \equiv (6, 6)$. (Ak taká kružnica existuje.)
 d) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (3, 0)$, $C \equiv (3, 4)$. (Má trojuholník ABC nejakú špeciálnu vlastnosť, ktorá môže zjednodušiť riešenie tejto úlohy?)
 e) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (1, 1)$, $B \equiv (3, 3)$, $C \equiv (1, 5)$.
 f) Kružnica, ktorá prechádza bodmi $A \equiv (1, 1)$, $B \equiv (3, 3)$, $C \equiv (3, 5)$.
 g) Dotyčnica k elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$ prechádzajúca bodom $(0, -3)$.
 h) Dotyčnica k hyperbole $2x^2 - 3y^2 + 8x^2 + 6y - 25 = 0$ prechádzajúca bodom $(5, 10)$.
 i) Dotyčnica k parabole $6y = x^2$ prechádzajúca bodom $(6, 6)$.

Literatúra

- [BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sborník zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algebre*. Fizmatlit, 2004.
- [ŠBP] Jaroslav Šedivý, Leo Boček, and Jozef Polák. *Analytická geometria kvadratických útvarov, matematika pre 3. ročník gymnázií*. SPN, Bratislava, 1994.

Krivky druhého rádu

Niečo o type krivky

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 + f = 0 \quad (1)$$

vieme zistiť z invariantov:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

- $\delta > 0 \Rightarrow$ *eliptický typ*
- $\delta < 0 \Rightarrow$ *hyperbolický typ*
- $\delta = 0 \Rightarrow$ *parabolický typ*

Ak $\delta \neq 0$, tak otočením a posunutím môžeme previesť krivku do nových súradníc, v ktorých bude mať vyjadrenie

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Nové súradnice sú orientované tak, že osi $z_{1,2}$ sú v smere vlastných vektorov k $\lambda_{1,2}$.

Pre $\delta \neq 0$ vieme nájsť *stred* kuželosečky riešením sústavy rovníc

$$ax + by + d = 0,$$

$$bx + cy + e = 0.$$

- [S, 540] Aký typ krivky predstavuje daná rovnica? Nájdite afinnú transformáciu, ktorou túto krivku môžeme previesť na kanonický tvar. Aký má táto krivka stred, osi?
 - $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0$;
 - $5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0$
 - $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 - 16 = 0$
 - $12x_1x_2 + 5x_2^2 - 12x_1 - 22x_2 - 19 = 0$
 - $7x_1^2 + 16x_1x_2 - 23x_2^2 - 14x_1 - 16x_2 - 218 = 0$
 - $7x_1^2 - 24x_1x_2 - 38x_1 + 24x_2 + 175 = 0$
 - $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 40x_1 - 30x_2 = 0$
 - $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_1 + 4 = 0$
 - $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 14x_2 + 7 = 0$
- [BPC, 9.4] Aký typ krivky predstavuje daná rovnica? Načrtnite ju.
 - $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_1 - 2x_2 + 9 = 0$
 - $4x_1x_2 - 3x_2^2 - 4x_1 + 10x_2 - 6 = 0$
 - $9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 8x_1 + 19x_2 + 4 = 0$
 - $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 0$
 - $x_1x_2 + 2x_1 + x_2 = 0$
 - $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 6x_2 + 25 = 0$
 - $5x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2 - 6x_1 + 4x_2 - 1 = 0$
 - $8x_1^2 + 34x_1x_2 + 8x_2^2 + 18x_1 - 18x_2 - 17 = 0$
 - $25x_1^2 - 30x_1x_2 + 9x_2^2 + 68x_1 + 19 = 0$
 - $8x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_1 + 3x_2 + 1 = 0$
 - $4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 - 8x_1 - 12x_2 - 5 = 0$
 - $225x_1^2 - 240x_1x_2 + 64x_2^2 + 30x_1 - 16x_2 + 1 = 0$
 - $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_1 - 5x_2 + 4 = 0$
 - $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1 - 14x_2 + 13 = 0$
 - $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 8x_1 - 8x_2 + 22 = 0$
 - $15x_1^2 + 24x_1x_2 + 15x_2^2 + 30x_1 - 24x_2 - 20 = 0$

q) $15x_1^2 - 16x_1x_2 - 15x_2^2 - 62x_1 - 44x_2 - 13 = 0$

Typ krivky by mal byť takýto: a) elipsa; b) hyperbola; c) parabola; d) elipsa; e) hyperbola; f) parabola; g) elipsa; h) hyperbola; i) parabola; j) dvojica pretínajúcich sa priamok; k) dvojica rovnobežných priamok; l) priamka; m) dvojica rovnobežných priamok; n) jediný bod; o) prázdna množina; p) prázdna množina; q) dvojica pretínajúcich sa priamok.

3. [R, s.54-55] Aký typ krivky predstavuje daná rovnica? Načrtnite ju.

a) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 46x_1 + 34x_2 + 93 = 0$

b) $x_1^2 - 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 16x_1 - 48x_2 - 88 = 0$

c) $4x_1^2 - 10x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0$

d) $3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 8x_1 - 24x_2 - 8 = 0$

e) $6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 20x_1 - 16x_2 - 198 = 0$

f) $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 18x_1 + 36x_2 - 279 = 0$

g) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 14x_1 + 20x_2 - 183 = 0$

h) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 8\sqrt{5}x_1 + 6\sqrt{5}x_2 - 15 = 0$

i) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 6\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{2}x_2 - 6 = 0$

Typ krivky by mal byť takýto: a) – d) hyperbola; e) – g) elipsa; h) – i) parabola.

Literatúra

- [BPC] L. A. Beklemisheva, A. Yu. Petrovich, and I. A. Chubarov. *Sbornik zadach po analiticheskoj geometrii i lineinoi algebre*. Fizmatlit, 2004.
- [R] John W. Rutter. *Geometry of Curves*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.
- [S] Yu. M. Smirnov. *Sbornik zadach po analiticheskoj geometrii i linejnoj algebre*. Golos, Moskva, 2005.

Duálny priestor

Duálny priestor k V je priestor V^* všetkých lineárnych zobrazení z V do R .

Báza duálneho priestoru. Ak máme bázu $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ priestoru V , tak za bázu duálneho priestoru V^* môžeme zobrať lineárne zobrazenia $b_1^*, \dots, b_k^*$ jednoznačne určené podmienkami

$$b_i^*(\vec{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ak } i = j, \\ 0 & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

Kanonický izomorfizmus. Zobrazenie $\epsilon_V: V \rightarrow V^{**}$ určené ako „evaluácia“, t.j. pre $\varphi \in V^*$ je

$$\epsilon_V(\varphi) = \varphi(\vec{v}),$$

je izomorfizmus medzi V a V^{**} . (Ak V je konečnorozmerný priestor.)

Duálne zobrazenie: Pre lineárne zobrazenie $f: V \rightarrow W$ je $f^*: W^* \rightarrow V^*$ je určené predpisom $f^*: \varphi \mapsto \varphi \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Ak f má maticu A vzhľadom na bázy $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$, tak f^* má vzhľadom na duálne bázy $w_1^*, \dots, w_k^*, v_1^*, \dots, v_n^*$ maticu A^T .

1. Nech V, W, U sú vektorové priestory nad poľom R . Dokážte nasledujúce tvrdenia:

- Ak $f, g: V \rightarrow W$ sú lineárne zobrazenia, tak $(f + g)^* = f^* + g^*$.
- Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie a $c \in R$, tak $(cf)^* = cf^*$.
- Ak $f: V \rightarrow W$ a $g: W \rightarrow U$ sú lineárne zobrazenia, tak $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- Pre $id_V: V \rightarrow V$ platí $(id_V)^* = id_{V^*}$.
- Ak $0: V \rightarrow W$ označuje nulové zobrazenie, tak $0^*: W^* \rightarrow V^*$ je tiež nulové zobrazenie.
- Ak $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie, tak platí

$$f^{**} \circ \epsilon_V = \epsilon_W \circ f.$$

Táto rovnosť vlastne hovorí, že ak priestor stotožníme s jeho druhým duálom prostredníctvom kanonického izomorfizmu ϵ_V resp. ϵ_W , tak zobrazenie f je „to isté“ ako zobrazenie f .

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \\ \epsilon_V \uparrow & & \uparrow \epsilon_W \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

g) Nech navyše V je konečnorozmerný a má bázu $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Vieme potom, že $v_1^*, \dots, v_n^*$ tvorí bázu priestoru V^* a $v_1^{**}, \dots, v_n^{**}$ tvorí bázu priestoru V^{**} . Ukážte, že

$$\epsilon_V(\vec{v}_i) = v_i^{**}.$$

Toto tvrdenie vlastne hovorí, že kanonický izomorfizmus medzi V a V^{**} je presne lineárne zobrazenie jednoznačne určené tým, že $v_i \mapsto v_i^{**}$.

h) Vedeli by ste napísať, akým maticovým rovnostiam týkajúcim sa transponovanej matice zodpovedajú niektoré z tvrdení, ktoré sme tu uviedli? Vedeli by ste pomocou tvrdenia g) zdôvodniť tvrdenie f) jednoduchším spôsobom v konečnorozmernom prípade?

2. Nech $f: V \rightarrow W$ je lineárne zobrazenie medzi konečnorozmernými priestormi. Dokážte, že:

a) f je injektívne $\Leftrightarrow f^*$ je surjektívne.

b) f je surjektívne $\Leftrightarrow f^*$ je injektívne.

Vedeli by ste dokázať tieto tvrdenia aj bez použitia matice zobrazenia priamo z definície duálneho zobrazenia? Skúste sa pritom zamyslieť aj nad tým, na ktorých miestach využívame to, že V a W sú konečnorozmerné.