Prevrátený rad prvočísel

28. septembra 2023

Veta o delení so zvyškom

Veta

Existuje ľubovoľne dlhá postupnosť po sebe idúcich zložených čísel.

Rad prevrátených hodnôt

Pre $A \subseteq \mathbb{N}$ môže rad $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ konvergovať alebo divergovať.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = ?$$

Rad prevrátených hodnôt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e - 1$$

Čísla bez štvorcov

Definícia

Hovoríme, že číslo $n \in \mathbb{N}$ je *číslo bez kvadratických deliteľov*, ak neexistuje prirodzené číslo $k > 1$ také, že $k^2 \mid n$.

Čísla bez štvorcov

Definícia

Hovoríme, že číslo $n \in \mathbb{N}$ je *číslo bez kvadratických deliteľov*, ak neexistuje prirodzené číslo $k > 1$ také, že $k^2 \mid n$.

- Presne tie čísla, kde kanonický rozklad obsahuje iba prvé mocniny prvočísel, t.j. $n = p_1 \dots p_k$.
- Každé prirodzené číslo možno jednoznačne napísať v tvare $n = jk^2$, kde j nemá kvadratických deliteľov.

Rad prevrátených hodnôt prvočísel

Veta

Rad prevrátených hodnôt prvočísel diverguje, t.j.

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$

$$\sum \frac{1}{p} = \infty$$

Prvý dôkaz

$$e^x > 1 + x$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}$$

$$e^{S_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{p_k}} > \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_k}\right).$$

$$e^{S_n} > \sum_{\substack{j \le p_n \\ j \in B}} \frac{1}{j}$$

Prvý dôkaz

$$\left(\sum_{\substack{j \le p_n \\ j \in B}} \frac{1}{j}\right)\left(\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k^2}\right) \ge \sum_{t=1}^{p_n} \frac{1}{t}.$$

$$\frac{\pi^2}{6} e^S > \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t}$$

Druhý dôkaz

Sporom – nech $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ konverguje.

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}$$

Druhý dôkaz

$$N_b \leq \sum_{i \geq k+1} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \leq \sum_{i \geq k+1} \frac{N}{p_i} < \frac{N}{2}$$

$$N_s \leq 2^k \sqrt{N}$$

$$N = N_b + N_s < \frac{N}{2} + 2^k \sqrt{N} < N$$

Tretí dôkaz

Tvrdenie

Ak rad $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ *konverguje, tak* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0$*, kde*

$$\pi(n) = |\{p \in \mathbb{P}; p \le n\}|$$

označuje počet prvočísel neprevyšujúcich n*.*

Tretí dôkaz

$$R_n = \sum_{p \le n, p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

$$\begin{aligned}
\pi(n) &= R_1 - R_0 + 2(R_2 - R_1) + \ldots + n(R_n - R_{n-1}) \\
&= nR_n - (R_0 + R_1 + \ldots + R_{n-1}) \\
\frac{\pi(n)}{n} &= R_n - \frac{R_0 + R_1 + \ldots + R_{n-1}}{n} \\
\lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{R_0 + R_1 + \ldots + R_{n-1}}{n} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} &= 0
\end{aligned}$$

Tretí dôkaz

Sporom – nech $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ konverguje.

$$\sum_{p \in \mathbb{P}, p > n} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi(n!m)}{m} < \frac{1}{2}$$

Tretí dôkaz

Zoberme $T_i = n!i - 1$ pre $i = 1, \ldots, m$.

- $p \mid T_i \Rightarrow p > n$
- $p \mid T_i \wedge p \mid T_j \Rightarrow p \mid i - j$

$$\sum_{n!m > p > n} \left(\frac{m}{p} + 1 \right) \geq m$$

$$\sum_{p > n} \frac{1}{p} + \frac{\pi(n!m)}{m} \geq 1$$