Prvočíselná funkcia

6. októbra 2020

Prvočíselná funkcia

$$\pi(x) = |\{p \leq x; p \in \mathbb{P}\}|$$

Prvočíselná veta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$$

- J. Hadamard a Ch. de la Valleé Poussin (1896)
- P. Erdös a A. Selberg (1949)

Podiely prvočísel

Tvrdenie

Množina $\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{P}\}$ *je hustá v* $\langle 0, +\infty)$.

Lema

Nech $0 < a < b$ *sú reálne čísla. Potom* $\lim\limits_{n\to\infty} (\pi(bn) - \pi(an)) = +\infty$.

Funkcie $\mathrm{Li}(x)$ a $\mathrm{li}(x)$

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \qquad \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1$$

Tvrdenie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Li}(x)}{x/\ln x} = 1$$

Čebyševove nerovnosti

Veta (Čebyševove nerovnosti)

Existujú také reálne kladné konštanty c_1, c_2, že pre všetky $x \geq 2$ platí

$$c_1 \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq c_2 \frac{x}{\ln x}.$$

Čebyševove nerovnosti

Lema

Pre každé reálne číslo $x \geq 2$ platí

$$\prod_{p \leq x} p < 4^x,$$

pričom uvedený súčin berieme cez všetky prvočísla p nepresahujúce x.

Veta

Pre každé dostatočne veľké číslo n platí

$$\pi(n) \leq \frac{5n}{\lg n}.$$

Čebyševove nerovnosti

$d_n = [1, 2, \ldots, n]$

Lema

Pre každé kladné číslo n platí $d_n \geq 2^{n-2}$.

Veta

Pre každé kladné číslo n platí

$$\pi(n) \geq \frac{n-2}{\lg n}.$$

n-té prvočíslo

Dôsledok

Nech p_n označuje n-té prvočíslo. Potom existujú reálne čísla $0 < a < b$ také, že

$$an \ln n < p_n < bn \ln n$$

pre každé $n \geq 2$.

Čebyševova funkcia

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \ln p$$

Veta

$$\pi(x) \sim \frac{\vartheta(x)}{\ln x}$$