Multiplikatívne funkcie

24. novembra 2020

Multiplikatívne funkcie

Definícia

Aritmetickou funkciou nazývame akúkoľvek funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ označuje množinu všetkých komplexných čísel).
Hovorím, že aritmetická funkcia f je *multiplikatívna,* ak pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$ platí rovnosť

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

a ak existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $f(n) \neq 0$.
Multiplikatívna funkcia je *úplne multiplikatívna,* ak táto rovnosť platí pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{N}$.

Multiplikatívne funkcie

Príklady:

- $f(n) = 1$
- $f(n) = n$ resp. $f(n) = n^{\alpha}$
- $f(n) = (n, k)$

Lema

Ak f je multiplikatívna funkcia tak $f(1) = 1$.

Multiplikatívne funkcie

Lema

Ak f je multiplikatívna funkcia a $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n, tak

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1})f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_k^{\alpha_k}).$$

Ak je navyše úplne multiplikatívna, tak

$$f(p^\alpha) = f(p)^\alpha$$

pre ľubovoľné $p \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Multiplikatívne funkcie

Lema

Ak f je multiplikatívna funkcia, tak aj funkcia

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

je multiplikatívna.

Lema

Nech $m, n \in \mathbb{N}$. Ak $(m, n) = 1$ a $d \mid mn$, tak existujú jednoznačne určené čísla $u, v \in \mathbb{N}$ také, že $d = uv$, $u \mid m$ a $v \mid n$. (Konkrétne sú to čísla $u = (d, m)$ a $v = (d, n)$.)

Funkcie $d(n)$ a $\sigma(n)$

Definícia

Nech $n \in \mathbb{N}$. Potom označíme ako

(i) $d(n)$ počet všetkých kladných deliteľov čísla n,

(ii) $\sigma(n)$ súčet všetkých kladných deliteľov čísla n.

Lema

Funkcie d a σ sú multiplikatívne.

Funkcie $d(n)$ a $\sigma(n)$

Veta

Nech $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n. Potom

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$
$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Dokonalé čísla

Definícia

Hovoríme, že prirodzené číslo n je *dokonalé* (alebo tiež *perfektné*) číslo, ak $\sigma(n) = 2n$.

Inými slovami, n je dokonalé ak sa rovná súčtu svojich vlastných deliteľov.

Dokonalé čísla

Veta

Párne číslo n je dokonalé číslo práve vtedy, keď má tvar $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, kde p aj $2^p - 1$ sú prvočísla.

Dokonalé čísla

Veta

Ak $n > 1$ je nepárne dokonalé číslo, tak n má tvar $p^{4k+1}m^2$, kde m je nepárne, p je prvočíslo tvaru $4b+1$, $p \nmid m$ a $k \geq 0$.

Funkcie $d(n)$ a $\sigma(n)$ pre veľké n

Veta

(i) *Ku každému reálnemu číslu $t > 1$ existuje nekonečne veľa takých čísel $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{\sigma(n)}{n} > t$.*

(ii) *Existuje nekonečne veľa takých čísel $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{\sigma(n)}{n} < 2$.*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} = \infty$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} = 1$$

Funkcie $d(n)$ a $\sigma(n)$ pre veľké n

Veta

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = +\infty$$

$$\liminf_{n\to\infty} d(n) = 2$$

$$\limsup_{n\to\infty} d(n) = +\infty$$

Funkcie $d(n)$ a $\sigma(n)$ pre veľké n

Veta

Pre každé $\varepsilon > 0$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{d(n)}{n^{\varepsilon}} = 0$.

Lema

Pre ľubovoľné $\delta > 0$ existuje reálne číslo k_δ také, že $\frac{d(n)}{n^{\delta}} \leq k_\delta$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.