Möbiova funkcia

4. decembra 2020

Möbiova funkcia

Definícia

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n definujeme *Möbiovu funkciu* μ predpisom

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{ak } n = 1; \\ (-1)^r, & \text{ak } n = p_1 \dots p_r \text{ je súčin navzájom rôznych prvočísel} \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Lema

Funkcia μ je multiplikatívna.

Möbiova funkcia

Veta

Nech f je multiplikatívna funkcia a nech $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla $n > 1$. Potom

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = (1 - f(p_1)) \dots (1 - f(p_k)).$$

Möbiova funkcia

Dôsledok

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & ak\ n = 1, \\ 0, & inak. \end{cases}$$

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \begin{cases} 1, & ak\ n = 1, \\ \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right), & inak. \end{cases}$$

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

Dirichletova konvolúcia

Definícia

Dirichletova konvolúcia (*Dirichletov súčin*) aritmetických funkcií f a g je funkcia

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Möbiova inverzia

Veta (Möbiova inverzia)

Ak $g(n) = \sum_{m|n} f(m)$ *pre ľubovoľné* n, *tak*

$$f(n) = \sum_{m|n} \mu(m) g\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) g(m).$$

Veta (Möbiova inverzia)

Ak $f(n) = \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) g(m)$, *tak* $g(n) = \sum_{m|n} f(m) = \sum_{m|n} f\left(\frac{n}{m}\right)$.

Möbiova inverzia

$$\begin{aligned} g = f * u \quad &\Rightarrow \quad f = \mu * g, \\ f = \mu * g \quad &\Rightarrow \quad g = f * u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g = f * u \quad &\Rightarrow \quad g * \mu = (f * u) * \mu = f * (u * \mu) = f * I = f \\ f = g * \mu \quad &\Rightarrow \quad f * u = (g * \mu) * u = g * (\mu * u) = g * I = g \end{aligned}$$