

Množiny a operácie s nimi

3. októbra 2024

Teória množín

Hlavný cieľ tejto prednášky:

- Pojem veľkosti (kardinality) pre nekonečné množiny.
- Aritmetika s kardinálnymi číslami.
- Aplikácie kardinálnych čísel.

Predtým potrebujeme vedieť niečo o množinách a zobrazeniach.

Georg Cantor

Georg Cantor - zakladateľ teórie množín

1874 - dôkaz o existencii transcendentných čísel

Nepoužíval axiomatický prístup – tzv. naivná teória množín.

Množina = súhrn objektov určených nejakou vlastnosťou.

Russellov paradox

Spomedzi všetkých množín vyberieme tie množiny, ktoré nie sú prvkom samej seba.

$$A = \{x; x \notin x\}$$

Ak $A \in A$, tak $A \notin A$ – spor.

Ak $A \notin A$, tak $A \in A$ – spor.

Axiomatická teória množín

Riešenie paradoxov:

- Axiomatická teória množín (neskôr).
- Pracovať iba s jednoduchými množinami, ako \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} a množinami, ktoré z nich vieme dostať základnými operáciami.

Príklady množín

\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N}; (\exists a, b \in \mathbb{N}) a^2 + b^2 = x\}$$

$$C = \{2x; x \in \mathbb{N}\}$$

Z nich môžeme tvoriť ďalšie množiny.

Logické spojky

| p | $\neg p$ |
|-----|----------|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Tautológia

| p | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ |
|-----|----------|-----------------|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

Tautológia

$$\neg(p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg p \wedge \neg q$$

| p | q | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ |
|-----|-----|------------|------------------|------------------------|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Obmena implikácie

| p | q | $\neg q$ | $\neg p$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg q \Rightarrow \neg p$ | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|-----------------------------|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Výroky s kvantifikátormi

Definícia

Výrok $(\forall x)P(x)$ znamená, že pre každý objekt x platí výrok $P(x)$.

Symbol \forall nazývame *všeobecný kvantifikátor*.

Výrok $(\exists x)P(x)$ znamená, že existuje taký objekt x , pre ktorý platí výrok $P(x)$. Symbol \exists nazývame *existenčný kvantifikátor*.

Výroky s kvantifikátormi

$$\begin{aligned}(\forall x \in A)P(x) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x)) \\ (\exists x \in A)P(x) &\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists x)(x \in A \wedge P(x))\end{aligned}$$

Výroky s kvantifikátormi

$$\neg[(\forall x)P(x)] \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x).$$

Definície

$$A = B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Leftrightarrow z \in B)$$

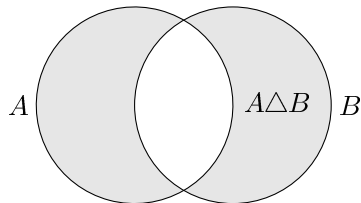
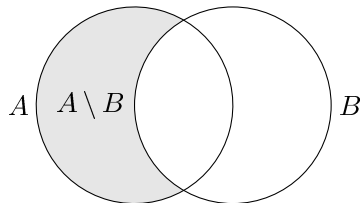
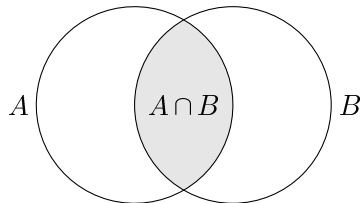
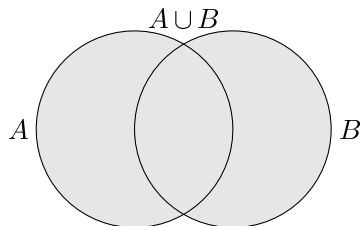
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Vennove diagramy



Inklúzia

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z)(z \in A \Rightarrow z \in B)$$

Vlastná podmnožina:

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

Potenčná množina:

$$\mathcal{P}(A) = \{B; B \subseteq A\}$$

Vlastnosti inklúzie

Tvrdenie

Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Potom platí:

- *Pre každú množinu platí $A \subseteq A$.*
- *$A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.*
- *Ak platí $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$.*

Identity pre \cup a \cap

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

- (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(asociatívnosť operácií \cup a \cap);
- (ii) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (komutatívnosť operácií \cup a \cap);
- (iii) $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$;
- (iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributívnosť);
- (v) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (idempotentosť operácií \cup a \cap);
- (vi) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (zákony absorpcie).

Zjednotenie a prienik systému množín

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\exists A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{z; (\exists i \in I) z \in A_i\}$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A := \{z; (\forall A \in \mathcal{S}) z \in A\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{z; (\forall i \in I) z \in A_i\}$$

$\bigcap \mathcal{S}$ definujeme len pre $\mathcal{S} \neq \emptyset$

Zjednotenie a prienik systému množín

Tvrdenie

Nech S a B sú ľubovoľné množiny. Potom platí:

$$B \cap \bigcup_{A \in S} A = \bigcup_{A \in S} (B \cap A);$$

$$B \cup \bigcap_{A \in S} A = \bigcap_{A \in S} (B \cup A).$$

Analógia s označením pre súčet a súčin

| | | | |
|-------------------------------|------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| $x + y$ | $A \cup B$ | $x \cdot y$ | $A \cap B$ |
| $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ | $\bigcup_{i \in I} A_i$ | $\prod_{n \in \mathbb{N}} x_n$ | $\bigcap_{i \in I} A_i$ |
| $\sum_{i=0}^n x_i$ | $\bigcup_{i=0}^n A_i$ | $\prod_{i=0}^n x_i$ | $\bigcap_{i=0}^n A_i$ |
| $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ | $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ | $\prod_{i=0}^{\infty} x_i$ | $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$ |

Inklúzia, prienik a zjednotenie

Tvrdenie

Nech A a B sú množiny. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) $A \subseteq B$;
- (ii) $A = A \cap B$;
- (iii) $B = A \cup B$.

Tvrdenie

Nech A , B , C sú množiny. Potom platí:

- (i) $\emptyset \subseteq A$;
- (ii) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
- (iii) Ak $A \subseteq B$, tak $A \cap C \subseteq B \cap C$ a $A \cup C \subseteq B \cup C$.

Identity pre množinový rozdiel

- (i) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$
- (ii) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C;$
- (iii) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$
- (iv) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C),$
 $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$
- (v) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B);$
- (vi) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = A \cap (C \setminus B);$
- (vii) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C);$

Identity pre množinový rozdiel

$$(viii) \quad A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B);$$

$$(ix) \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset.$$

$$(x) \quad A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i), \quad A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

$$(xi) \quad \text{Ak } B \subseteq C, \text{ tak } A \setminus C \subseteq A \setminus B.$$

$$(xii) \quad \text{Ak } B \subseteq C, \text{ tak } B \setminus A \subseteq C \setminus A.$$

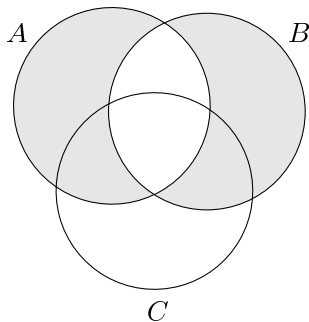
Identity pre symetrickú diferenciu

Tvrdenie

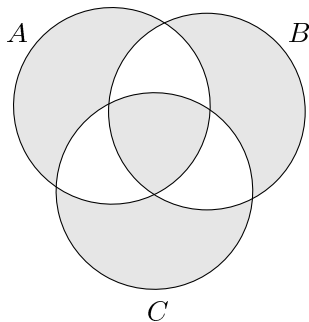
Nech A, B, C sú množiny. Potom platí:

- (i) $A\Delta B = B\Delta A$;
- (ii) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$;
- (iii) $A\Delta A = \emptyset$, $A\Delta\emptyset = A$;
- (iv) $A\cup B = A\Delta B\Delta(A\cap B)$;
- (v) $A\setminus B = A\Delta(A\cap B)$.

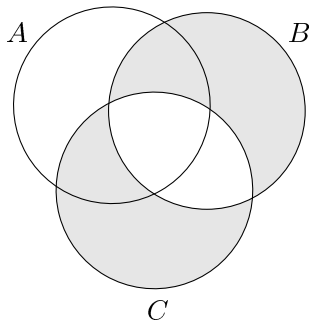
Asociatívnosť symetrickej diferencie



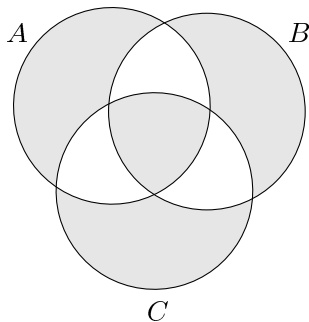
Asociatívnosť symetrickej diferencie

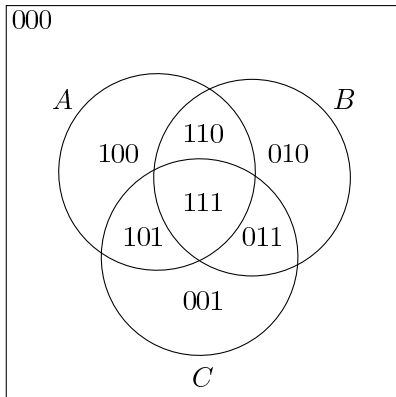


Asociatívnosť symetrickej diferencie



Asociatívnosť symetrickej diferencie



Porovnanie s tabuľkou pravdivostných hodnôt

Usporiadaná dvojica

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d$$

Karteziánsky súčin

Definícia

Karteziánsky súčin množín A a B je množina, ktorej prvkami sú práve také usporiadané dvojice, kde prvý prvok patrí do množiny a a druhý prvok patrí do množiny b . Túto množinu označujeme

$$A \times B := \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Karteziánsky súčin

Tvrdenie

Nech A, B, C sú množiny. Potom platí

- (i) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$;
- (ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
- (iii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
- (iv) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
- (v) *Ak navyše $A, B, C, D \neq \emptyset$, tak platí*
 $A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D$