Axióma výberu

14. decembra 2023

Axióma výberu

Axióma VIII (Axióma výberu)

$$(\forall \mathcal{S})[(\forall A \in \mathcal{S})(A \neq \emptyset) \wedge (\forall A \in \mathcal{S})(\forall B \in \mathcal{S})(A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists V)(\forall A \in \mathcal{S})(\exists x)(V \cap A = \{x\})]$$

Pre každý systém neprázdnych po dvoch disjunktných množín existuje výberová množina, t.j. taká množina, ktorá má s každou z množín tohoto systému jednoprvkový prienik.

Surjekcie a injekcie

Tvrdenie

Ak $f\colon A \to B$ *je surjekcia, tak existuje* $g\colon B \to A$ *také, že* $f \circ g = id_B$.

- Toto tvrdenie je (v ZF) ekvivalentné s axiómou výberu.
- Analogické tvrdenie pre injekcie: Ak $B \neq \emptyset$ a $g\colon B \to A$ je injekcia, tak existuje $f\colon A \to B$ také, že $f \circ g = id_B$.

Dôsledok

Nech $B \neq \emptyset$. *Existuje surjekcia* $A \to B \Leftrightarrow$ *existuje injekcia* $B \to A$.

Surjekcie a injekcie

Dôsledok

Nech $B \neq \emptyset$. Existuje surjekcia $A \to B$ $\Leftrightarrow$ existuje injekcia $B \to A$.

Dostávame takto popis vzťahu $|A| \leq |B|$ pre kardinality pomocou *surjektívnych* zobrazení. (Definovali sme ho pomocou *injektívnych* zobrazení.)

Surjekcie a injekcie

Dôsledok

Nech $B \neq \emptyset$. Existuje surjekcia $A \to B \Leftrightarrow$ existuje injekcia $B \to A$.

Pri dôkaze sa nám hodí použiť aj to, že:

- Ak $g \circ f$ je surjekcia, tak g je surjekcia.
- Ak $g \circ f$ je injekcia, tak f je injekcia.

Cauchyho a Heineho definícia spojitosti

Definícia (Cauchyho definícia spojitosti)

Funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *spojitá* v bode $a \in \mathbb{R}$, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definícia (Heineho definícia spojitosti)

Funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *sekvenciálne spojitá* v bode $a \in \mathbb{R}$, ak platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Tvrdenie

Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia a $a \in \mathbb{R}$. Funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď je sekvenciálne spojitá v bode a.

Cauchyho a Heineho definícia spojitosti

- Ak by sme sa zaoberali spojitosťou funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na celom $\mathbb{R}$, tak ekvivalencia Cauchyho a Heineho definície platí už v ZF.
- Z platnosti ekvivalencie týchto dvoch definícií spojitosti pre reálne funkcie v bode už vyplýva platnosť axiómy výberu pre spočítateľné systémy podmnožín $\mathbb{R}$.

Definícia miery

Definícia

Množina $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *σ-algebra* na množine X, ak platí

i. $X \in \mathcal{S}$;

ii. $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S}$; (množina $\mathcal{S}$ je uzavretá vzhľadom na vytváranie doplnkov)

iii. $A_n \in \mathcal{S}$ pre $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$; (množina $\mathcal{S}$ je uzavretá vzhľadom na spočítateľné zjednotenia).

Definícia miery

Definícia

Ak $\mathcal{S}$ je nejaká σ-algebra na X, tak funkcia $m\colon \mathcal{S} \to \langle 0, \infty \rangle$ z $\mathcal{S}$ ak platí

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$$

pre každý spočítateľný systém $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ disjunktných množín z $\mathcal{S}$.

Prvky σ-algebry $\mathcal{S}$ sa zvyknú nazývať *merateľné množiny.*

Stručne: že miera je funkcia zo σ-algebry do $\mathbb{R}$, ktorá je nezáporná a σ-aditívna.

Miera je *monotónna*:

$$A \subseteq B \wedge A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow m(A) \leq m(B)$$

Definícia miery

Miera je *monotónna*:

$$A \subseteq B \wedge A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow m(A) \leq m(B)$$

Definícia

Miera $m \colon \mathcal{S} \to \langle 0, \infty \rangle$ na množine $\mathbb{R}$ sa nazýva *invariantná na posun* alebo *translačne invariantná,* ak pre každú množinu $A \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathbb{R}$ aj množina

$$x + A = \{x + a; a \in A\}$$

patrí do $\mathcal{S}$ a platí

$$m(x + A) = m(A).$$

Inak povedané, miera množiny sa nezmení ak ju posunieme.

Lebesguova miera

Lebesguova miera:

- je translačne invariantná;
- miera intervalu je jeho dĺžka;
- miera konečnej množiny je nulová.

Vitaliho konštrukcia

Tvrdenie

Neexistuje translačne invariantná miera $m\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \langle 0, \infty\rangle$ *taká, že* $m(\langle a, b\rangle) = b - a$ *pre ľubovoľné* $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Rozklad $(\mathbb{R}, +)$ podľa $\mathbb{Q}$ má triedy

$$a + \mathbb{Q} = \{a + q; q \in \mathbb{Q}\}$$

pre $a \in \mathbb{R}$.
$V =$ výberová množina pre $\{(a + \mathbb{Q}) \cap \langle 0, 1\rangle; a \in \mathbb{R}\}$

$$\langle 0, 1\rangle \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1, 1\rangle} q + V \subseteq \langle -1, 2\rangle,$$

Vitaliho konštrukcia

Označme $B := \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1,1 \rangle} q + V$.

$$m(B) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1,1 \rangle} m(q + V) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap \langle -1,1 \rangle} m(V).$$

Teda $m(B) \in \{0, \infty\}$

$$1 = m(\langle 0, 1 \rangle) \leq m(B) \leq m(\langle -1, 2 \rangle) = 3$$

Spor

Vitaliho konštrukcia

Dôsledok

Existuje lebesguovsky nemerateľná podmnožina $\mathbb{R}$.

Banach-Tarskiho paradox

Veta (Banach-Tarski)

Pre ľubovoľné dve ohraničené množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ *existujú rozklady* $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ *a* $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ *na konečný počet množín také, že* A_i *a* B_i *sú kongruentné (t.j. jednu z druhej možno získať posunutím a otočením).*

Aplikácie axiómy výberu

Axióma výberu alebo jej ekvivalentné podoby (Zornova lema, princíp dobrého usporiadania) sa dajú použiť na dôkaz:

- Porovnateľnosť kardinálnych čísel
- $a + b = a \cdot b = \max\{a, b\}$ pre kardinály $a, b \geq \aleph_0$
- Existencia bázy v ľubovoľných (aj nekonečnorozmerných) vektorových priestoroch.
- ...

Hamelova báza

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F.
Podmnožinu $A \subseteq V$ nazývame *lineárne nezávislou* podmnožinou, ak pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_n \in F$ a $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in A$ platí

$$c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Hovoríme, že podmnožina $A \subseteq V$ *generuje* priestor V, ak každý vektor z A sa je lineárna kombinácia (konečného počtu) vektorov z A. Označujeme $[A] = V$.
$(\forall\vec{\alpha} \in V)$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(\exists c_1, \dots, c_n \in F)$ a $(\exists\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n \in A)$

$$\vec{\alpha} = c_1\vec{\alpha}_1 + \cdots + c_n\vec{\alpha}_n.$$

Hamelova báza

Definícia

Podmnožina A sa nazýva *Hamelova báza* priestoru V, ak je lineárne nezávislá a $[A] = V$.

Veta

Nech V je vektorový priestor nad poľom F a A je lineárne nezávislá podmnožina V. Potom existuje Hamelova báza B taká, že $A \subseteq B$.

Hamelova báza

Tvrdenie

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Nech $B_{1,2}$ sú Hamelove bázy priestoru V. Potom $|B_1| = |B_2|$.

Vďaka tomu vieme definovať dimenziu aj pre nekonečnorozmerné priestory ako *kardinalitu* Hamelovej bázy.

Príklad

c_{00} = reálne postupnosti, ktoré majú iba konečne veľa nenulových členov

$$\dim(c_{00}) = \aleph_0$$

Hamelova báza

Veta

Nech B je Hamelova báza vektorového priestoru V a $f : B \to W$ je zobrazenie, pričom W je vektorový priestor. Potom existuje práve jedno lineárne zobrazenie $g : V \to W$ také, že $g|_B = f$.

Veta

Vektorové priestory V a W sú izomorfné práve vtedy, keď majú rovnakú Hamelovu dimenziu.

Cauchyho funkcionálna rovnica

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

Lema

Ak f je riešenie funkcionálnej rovnice (1)*, tak*

$$(\forall r \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{R}) f(rx) = rf(x) \tag{2}$$

Tvrdenie

Ak f je spojité riešenie funkcionálnej rovnice (1)*, tak* $f(x) = ax$ *pre nejaké* $a \in \mathbb{R}$*.*

Cauchyho funkcionálna rovnica

Tvrdenie

Ak f je riešenie funkcionálnej rovnice (1) *a f je spojité v nejakom bode $x_0 \in \mathbb{R}$, tak f je spojité na celom $\mathbb{R}$, a teda f má tvar $f(x) = ax$ pre nejaké $a \in \mathbb{R}$.*

Tvrdenie

Ak funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovuje rovnici (1) *a je ohraničená na nejakom netriviálnom intervale I, tak $f(x) = ax$ pre nejaké $a \in \mathbb{R}$.*

Tvrdenie

Ak f je monotónne riešenie funkcionálnej rovnice (1)*, tak $f(x) = ax$ pre nejaké $a \in \mathbb{R}$.*

Cauchyho funkcionálna rovnica

S využitím Hamelovej bázy vieme dokázať i existenciu riešení, ktoré nie sú lineárne.

Veta (AC)

Existujú nelineárne riešenia rovnice (1) (*t.j. riešenia, ktoré nie sú tvaru* $f(x) = ax$).

Cauchyho funkcionálna rovnica

Nespojité riešenie (1) má hustý graf.

Tvrdenie

Ak $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nespojité riešenie (1), *tak graf tejto funkcie*

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$$

je hustá podmnožina $\mathbb{R}^2$.