Iný dôkaz Cantor-Bernsteinovej vety

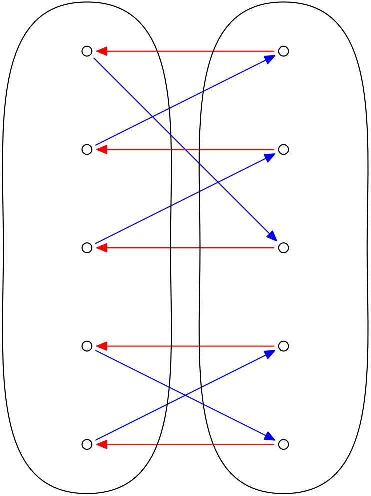
9. februára 2022

Cantor-Bernsteinova veta

$$|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X| \qquad \Rightarrow \qquad |X| = |Y|.$$

Ak existuje injekcia $f\colon X \to Y$ a existuje injekcia $g\colon Y \to X$, tak existuje aj bijekcia $h\colon X \to Y$.

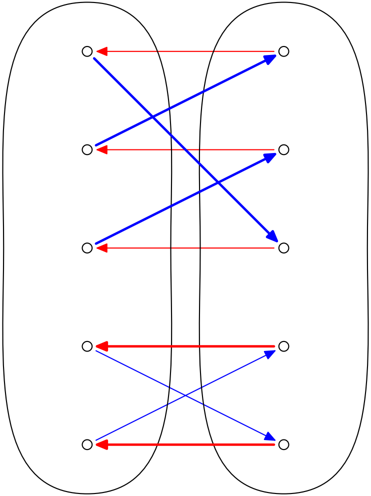
Injekcie dvoma smermi



Injekcie dvoma smermi

- Máme injekcie dvoma smermi $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$.
- Na nájdenie bijekcie $h: X \to Y$ vieme používať iba f a g.
- Chceme vybrať niektoré modré a niektoré červené šípky tak, aby spolu tvorili bijekciu.

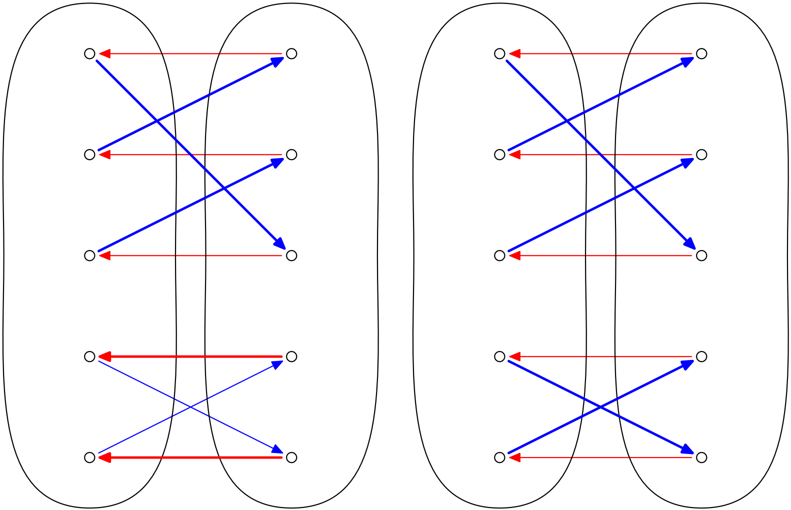
Injekcie dvoma smermi



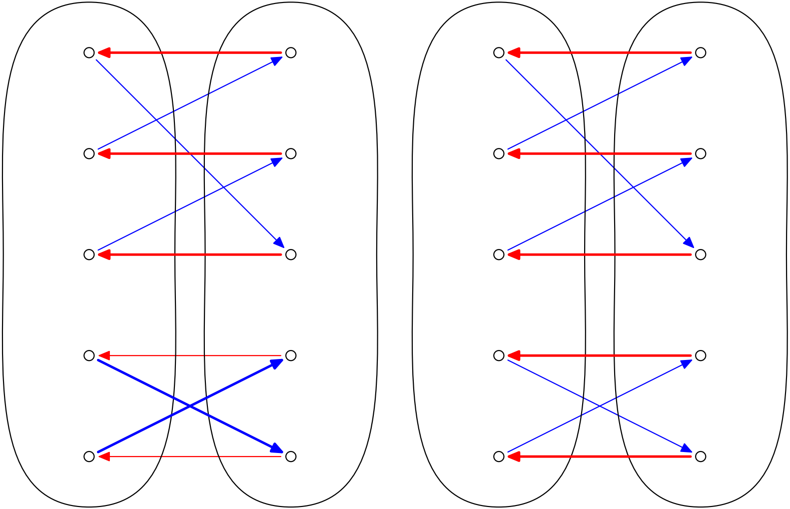
Konečný príklad

- Máme viacero možností na výber bijekcie h.
- Konečné príklady sú menej zaujímavé: Ak $|X| = |Y|$, tak ľubovoľná injekcia $X \to Y$ je súčasne aj bijekcia

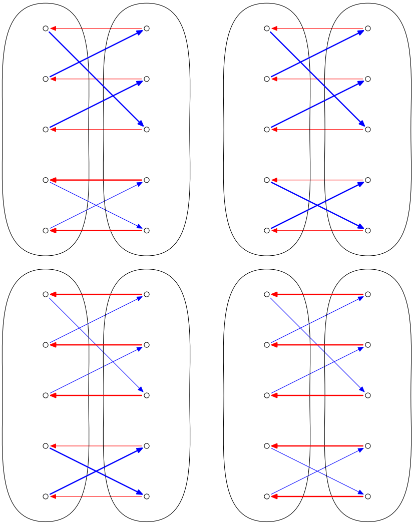
Konečný príklad



Konečný príklad



Konečný príklad



Nekonečný príklad

- Pozrime sa na nejaké jednoduché príklady ak X, Y sú nekonečné.
- Skúsme $X = Y = \mathbb{N}$ a $f(x) = g(x) = x + 1$.
- Mali by sme postupne prísť na to, že v tomto prípade máme jedinú možnosť ako z modrých a červených šípok skombinovať bijekciu.

Nekonečný príklad

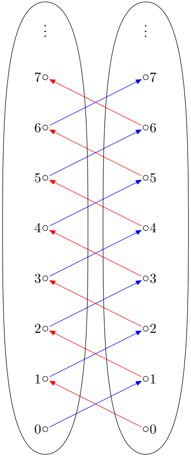
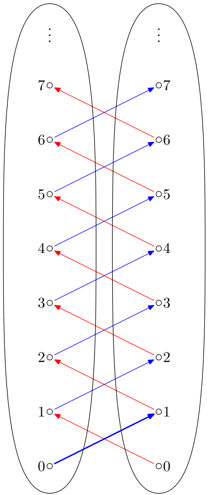
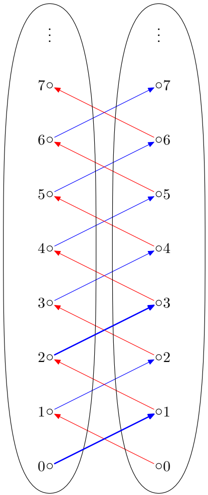


Figure: Injekcie $f(x) = g(x) = x + 1$ pre $X = Y = \mathbb{N}$

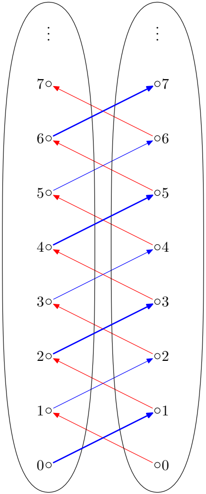
V bode 0 musíme vybrať modrú šípku



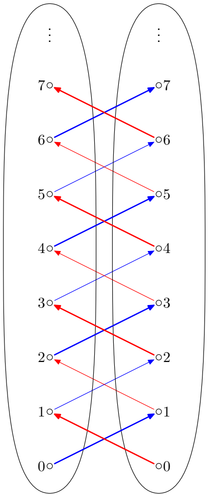
Teraz už máme jedinú možnosť aj v bode 2



Vo všetkých párnych číslach musia byť modré šípky



Bijekcia h je jednoznačne určená



Iný nekonečný príklad

- Nie vždy to je tak, že h je určené jednoznačne – to sme videli už pri prvom príklade.
- V konečnom prípade mohla nejednoznačnosť vzniknúť iba v podobe cyklov.
- V nekonečnom prípade je ešte aj iný problém, ktorý môže viesť k nejednoznačnosti.
- Skúsme nájsť všetky možnosti pre $X = Y = \mathbb{Z}$ a $f(x) = g(x) = x + 1$.
- Dve možnosti sú tu očividné: $h = f$ a $h = g^{-1}$.
- Ak si zvolíme čo vyberieme v niektorých bodoch, je potom už h jednoznačne určené?

Iný nekonečný príklad

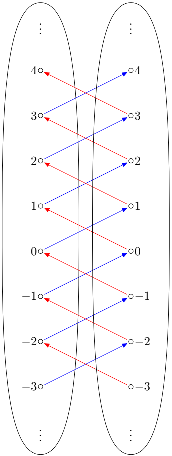
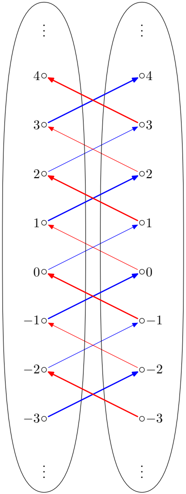
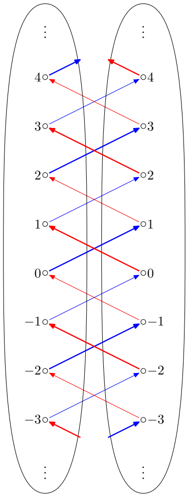


Figure: Injekcie $f(x) = g(x) = x + 1$ pre $X = \mathbb{Z}$

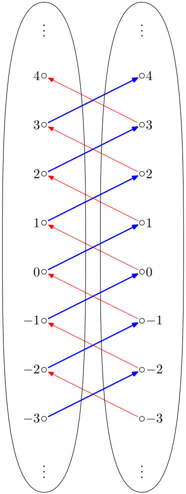
Dostali sme 4 možnosti



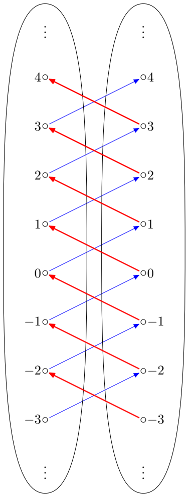
Dostali sme 4 možnosti



Dostali sme 4 možnosti



Dostali sme 4 možnosti



Zhrnutie príkladov

V dôkaze budeme vlastne robiť podobné veci, ako sme videli v týchto príkladoch:

- Pre niektoré prvky sme mali jedinú možnosť výberu.
- Boli to napríklad prvky na ktoré sa nič nezobrazí.
- Ale aj prvky ak sme sa do takéhoto prvku vedeli dostať tak, že sa „vraciam" po šípkach.
- Inde sme si mohli vybrať. (Napríklad všade červené šípky.)

Reťazec predchodcov

Majme injekcie $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ (modré a červené šípky). *Reťazec predchodcov* = vraciame sa z daného bodu množiny X po šípkach.

- $x_0 \in X$
- $y_0 \in Y$ také, že $g(y_0) = x_0$ (ak také y_0 existuje, inak skončíme)
- $x_1 \in X$ také, že $f(x_1) = y_0$ (ak existuje)
- Postupujeme ďalej indukciou, t.j. v indukčnom kroku vyberáme prvky také, že $g(y_n) = x_n$ a $f(x_{n+1}) = y_n$.
- Ak prvok s uvedenými vlastnosťami neexistuje, reťazec ukončíme.

Modré prvky

Pre každý prvok z X sme dostali nejaký reťazec $(x_0, y_0, x_1, \dots)$.

- Môže byť nekonečný alebo konečný.
- Ak je konečný, mohol skončiť v množine X alebo v množine Y.
- Nazvime prvok $x \in X$ *modrý*, ak je jeho reťazec predchodcov konečný a *končí v* X.
- Toto sú presne prvky z X, kde *musíme* vybrať modré šípky.

Bijekcia $h\colon X \to Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \text{ je modré,} \\ y & \text{také, že } g(y) = x; \text{ inak.} \end{cases} \tag{1}$$

- h je zobrazenie.
- h je surjekcia.
- h je injekcia.

Porovnanie s predošlým dôkazom

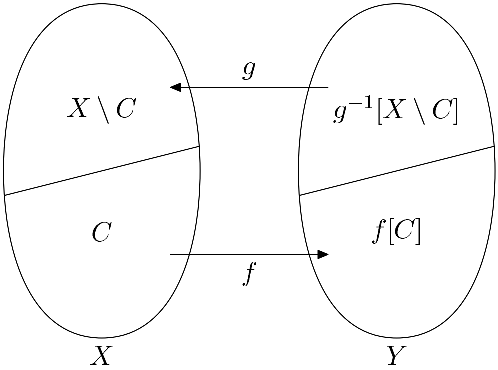


Figure: Ilustrácia k dôkazu Cantor-Bernsteinovej vety

Porovnanie s predošlým dôkazom

- Predošlý dôkaz: Našli sme vhodné $C \subseteq X$, na množine C sme použili f, mimo množiny C sme použili g.
- To isté sme spravili aj teraz, množina C sú v tomto dôkaze „modré body“.
- Rozdiel bol v spôsobe, akým sme množinu C našli.

Induktívny dôkaz

$$F(A) = X \setminus g[Y \setminus f[A]]$$

$A_0 = \emptyset,\ A_{n+1} = F(A_n)$ a

$$C := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Induktívny dôkaz

$$F(C) = F\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = X \backslash g[Y \backslash f[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n]] = X \backslash g[Y \backslash \bigcup_{n=0}^{\infty} f[A_n]] =$$

$$X \setminus g[\bigcap_{n=1}^{\infty} (Y \setminus f[A_n])] = X \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} g[Y \setminus f[A_n]] =$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (X \setminus g[Y \setminus f[A_n]]) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = C.$$

Vety o pevnom bode

Veta (Knaster-Tarski)

Nech L je úplný zväz a $f: L \to L$ je monotónne zobrazenie t.j. platí

$$(\forall x, y \in L) f(x) \leq f(y).$$

Potom existuje $c \in L$ také, že platí

$$f(c) = c$$

t.j. existuje pevný bod zobrazenia f.

Vety o pevnom bode

Veta (Kleene)

Nech L je úplný zväz, jeho najmenší prvok označme 0. Nech $f: L \to L$ je monotónne zobrazenie, ktoré navyše zachováva supréma, t.j. pre ľubovoľné $\{x_i; i \in I\} \subseteq L$ platí

$$f\left(\sup_{i\in I} x_i\right) = \sup_{i\in I} f(x_i).$$

Nech $c = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, kde postupnosť (x_n) je určená induktívne ako $x_0 = 0$ a

$$f(x_{n+1}) = x_n.$$

Potom platí

$$c = f(c),$$

t.j. c je pevný bod zobrazenia f.

Vety o pevnom bode

Veta (Kleene)

Navyše, toto je najmenší pevný bod zobrazenia f. T.j. ak c' je tiež pevný bod, tak platí $c \leq c'$.

Úplný zväz

- O (úplných) zväzoch ste sa neučili.
- Museli by sme najprv stráviť dosť dlhý čas úvodom o čiastočne usporiadaných množinách.
- Dva príklady zväzov: $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(I, \leq)$

Aj ak ste sa neučili o čiastočných usporiadaniach, tak asi vidno že „$\subseteq$“ a „$\leq$“ majú niektoré podobné vlastnosti

$$A \subseteq A$$
$$(A \subseteq B) \land (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq B)$$
$$(A \subseteq B) \land (B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$$

Vety o pevnom bode

Tvrdenie

Nech $F\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ je funkcia taká, že platí

$$A \subseteq B \qquad \Rightarrow \qquad F(A) \subseteq F(B)$$

pre ľubovoľné $A, B \subseteq X$.
Potom existuje množina C taká, že

$$F(C) = C.$$

Tvrdenie

Nech $I = \langle 0, 1\rangle$ a $f\colon I \to I$ je neklesajúca funkcia. Potom existuje bod $c \in I$ taký, že $f(c) = c$.

Vety o pevnom bode

Tvrdenie

Nech $F\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ je funkcia taká, že platí

$$A \subseteq B \qquad \Rightarrow \qquad F(A) \subseteq F(B)$$
$$F(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} F(A_i)$$

Ak definujeme $A_0 = \emptyset$ a $A_{n+1} = F(A_n)$, tak pre množinu

$$C = \bigcup_{i=0}^{n} A_n$$

platí $F(C) = C$.
Navyše, ak $D \subseteq X$ je iná množina s vlastnosťou $F(D) = D$, tak $C \subseteq D$. (Inak povedané, C je najmenší pevný bod funkcie F.)

Vety o pevnom bode

Tvrdenie

Nech $I = \langle 0, 1 \rangle$ $f : I \to I$ *je zobrazenie ktoré je neklesajúce a spojité. Definujme postupnosť* a_n *rekurentne ako* $a_0 = 0$ *a*

$$a_{n+1} = f(a_n).$$

Potom pre $c = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ *platí*

$$f(c) = c.$$

Navyše, c *je najmenší pevný bod funkcie* f*. T.j. ak pre nejaké* $d \in I$ *platí* $f(d) = d$*, tak* $c \leq d$*.*