Komplexné čísla

19. decembra 2024

Komplexné čísla

$$x^2 = -1$$

- Zadefinujeme množinu $\mathbb{C}$ a na nej operácie $+$, $\cdot$.
- Bude to rozšírenie reálnych čísel. (T.j. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ a pre reálne čísla fungujú operácie rovnako.)
- Bude sa s nimi dať rozumne počítať; $\mathbb{C}$ je pole.
- V $\mathbb{C}$ bude mať rovnica $x^2 = -1$ riešenie. (V $\mathbb{R}$ riešenie nemá.)
- Komplexné čísla majú aj veľa ďalších zaujímavých vlastností.

Komplexné čísla

Ideme k reálnym číslam pridať nové číslo také, že

$$i^2 = -1.$$

$$\mathbb{C} = \{a + bi;\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Komplexné čísla

- $z = a + bi$ je *algebraický zápis* komplexného čísla
- Číslo a sa nazýva *reálna časť* komplexného čísla a bi sa nazýva *imaginárna časť* komplexného čísla.
- Označujeme jeho reálnu časť $\operatorname{Re} z = a$ a imaginárnu časť $\operatorname{Im} z = bi$.
- Dve komplexné čísla sa rovnajú, ak sa zhoduje reálna aj imaginárna časť.

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1 = a_2 \text{ a } b_1 = b_2$$

Rovnosť komplexných čísel

- Dve komplexné čísla sa rovnajú, ak sa zhoduje reálna aj imaginárna časť.

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1 = a_2 \text{ a } b_1 = b_2$$

- Máme bijekciu $C \to \mathbb{R}$:

$$a + bi \mapsto (a, b)$$

- Komplexné čísla by sme teda mohli definovať aj ako usporiadané dvojice reálnych čísel.
- Môžeme ich reprezentovať ako body (alebo vektory) v rovine.

Súčet a súčin komplexných čísel

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac+bci+adi+bdi^2\\ &= ac+(bc+ad)i-bd\\ &= (ac-bd)+(bc+ad)i\end{aligned}$$

Súčet a súčin komplexných čísel

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Sčitovanie = súčet usporiadaných dvojíc = súčet vektorov v $\mathbb{R}^2$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Súčet a súčin komplexných čísel

Príklad

$(2+3i)+(2-i)=4+2i$

$(2+3i)(2-i)=4-2i+6i+3=7+4i$

$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)=2+2i+2i-2=4i$

Komplexné čísla obsahujú reálne čísla

- Komplexné číslo $a + bi$ stotožňujeme s reálnym číslom a.
- Teda $\mathbb{R} = \{a + 0i; a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$.
- Operácie fungujú rovnako:

$$(a + 0i) + (b + 0i) = (a + b) + 0i$$
$$(a + 0i)(b + 0i) = ab + 0i$$

Súčet a súčin komplexných čísel

$$i^1 = i \quad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \quad i^4 = 1$$

$$i^{4k+1} = i \quad i^{4k+2} = -1 \quad i^{4k+3} = -i \quad i^{4k} = 1$$

Komplexné čísla tvoria pole

- Chceme si rozmyslieť, že s komplexnými číslami sa dá „zmysluplne“ počítať.
- Stručne sa to dá povedať tak, že $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je pole.
- Ak niekto nepoznám pojem poľa, tak sa to dá povedať tak, že: Sčitovanie a násobenie komplexných čísel má veľa vlastností podobných ako pre reálne čísla.

Sčitovanie aj násobenie sú komutatívne

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$$
$$(a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (c + di) \cot (a + bi)$$
$$(ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (cb + da)i$$

Sčitovanie aj násobenie sú asociatívne

$$(a+bi)+[(c+di)+(e+fi)] = (a+(c+e))+(b+(d+f))i$$
$$[(a+bi)+(c+di)]+(e+fi) = ((a+c)+e)+((b+d)+f)i$$
$$z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$$

$$(a+bi)[(c+di)(e+fi)] = (a+bi)[(ce-df)+(cf+de)i] =$$
$$= (ace-adf-bcf-bde)+(acf+ade+bce-bdf)i$$
$$[(a+bi)(c+di)](e+fi) = [(ac-bd)+(bc+ad)i](e+fi) =$$
$$= (ace-bde-bcf-adf)+(acf-bdf+bce+ade)i$$
$$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$$

Distributívnosť

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

$$\begin{aligned}
z_1(z_2 + z_3) &= (a + bi)[(c + e) + (d + f)i] \\
&= a(c + e) - b(d + f) + a(d + f)i + b(c + e)i \\
&= ac + ae - bd - bf + adi + afi + bci + bei \\
&= (ac - bd + bci + adi) + (ae - bf + afi + bei) \\
&= (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi) \\
&= z_1 z_3 + z_2 z_3
\end{aligned}$$

Neutrálne prvky

$$(0+0i)+(c+di)=c+di$$
$$(1+0i)\cdot(c+di)=c+di$$

Neutrálne prvky $0=0+0i$ a $1=1+0i$ sú rovnaké ako v $\mathbb{R}$.

Inverzný prvok pre sčitovanie

$$-(a+bi) = -a - bi$$
$$(a+bi) + (-a-bi) = 0 + 0i = 0$$

- Sčitovanie je jednoduché.
- Je to to isté, ako obvyklé sčitovanie usporiadaných dvojíc (po súradniciach).
- Je to to isté, ako obvyklé sčitovanie vektorov v rovine.
- Ak sa pozeráme iba na sčitovanie, tak máme izomorfné grupy:

$$(\mathbb{C},+) \cong (\mathbb{R},+).$$

Inverzný prvok pre násobenie

Pre $c + di \neq 0 + 0i$, t.j. $c \neq 0$ alebo $d \neq 0$.

$$\frac{1}{c+di} = \frac{1}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{c-di}{c^2+d^2}$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} =$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Inverzný prvok pre násobenie

$$\frac{1}{c+di} = \frac{c-di}{c^2+d^2}$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$(c+di)\cdot\frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{(c+di)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{c^2+d^2}{c^2+d^2} = 1$$

Delenie komplexných čísel

Príklad

$$\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5i}{5} = i$$

Komplexne združené číslo

Definícia

Komplexne združeným číslom k číslu $z = a + bi$ nazývame číslo $\overline{z} = a - bi$.
Číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazývame *absolútna hodnota* komplexného čísla z.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$z = \overline{z} \qquad \Leftrightarrow \qquad z \text{ je reálne}$$

$$z = -\overline{z} \qquad \Leftrightarrow \qquad z \text{ je rýdzoimaginárne}$$

Komplexné čísla ako body v rovine

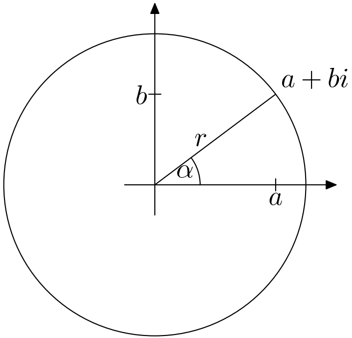

Figure: Znázornenie komplexného čísla v rovine

Goniometrický tvar

- Komplexnému číslo $z = a + bi$ zodpovedá bod resp. vektor (a, b).
- Vzdialenosť od počiatku:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Uhol s reálnou osou: $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ a $\sin\varphi = \frac{b}{r}$.
- Dostaneme potom:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Goniometrický tvar

Definícia

Zápis komplexného čísla v tvare

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

nazývame *goniometrický zápis* komplexného čísla. Číslo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazývame *absolútna hodnota* alebo tiež *modul* komplexného čísla z a označujeme ho $|z|$. Číslo φ také, že $a = r\cos\varphi$ a $b = r\sin\varphi$ nazývame *argument* komplexného čísla z.

Goniometrický tvar

Príklad

Pre $z = 1 - \sqrt{3}i$ máme $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2.$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$
$$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dostaneme

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Goniometrický tvar

Príklad

Z goniometrického tvaru algebraický:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i.$$

Moivrova veta

Pri vynásobení dvoch komplexných čísel sa vynásobia ich absolútne hodnoty a ich argumenty sa sčítajú.

Veta (Moivrova veta)

Nech $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *a* $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$*. Potom pre ich súčin platí*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)). \tag{1}$$

Špeciálne z toho vyplýva, že pre absolútne hodnoty platí

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{2}$$

Moivrova veta

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} \\ &= z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \end{aligned}$$

Moivrova veta

$$
\begin{aligned}
|z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\
&= (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\
&= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\
&= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2
\end{aligned}
$$

Moivrova veta

$$\begin{gathered}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) = \\ = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\end{gathered}$$

Pre $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$ máme

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Mocniny

Dôsledok

Ak $n \in \mathbb{N}$ *a* $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, *tak*

$$z^n = r^n\left(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\right)$$

Mocniny

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^{n-j} \cos^j\alpha \sin^{n-j}\alpha$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - \dots$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1}x\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x - \dots$$

Mocniny

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\cos x \sin x$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$$
$$\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$
$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$
$$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$$
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$$
$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 \sin^2 x + 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$$
$$\sin 6x = 6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x$$

„Odmocniny“ zo záporného čísla

Vieme riešiť $x^2 = r$ aj pre $r \in \mathbb{R}$, $r < 0$.

$$
\begin{aligned}
x^2 &= -a^2 \\
x^2 + a^2 &= 0 \\
(x - ia)(x + ia) &= 0 \\
x &= \pm ia
\end{aligned}
$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(2a)^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$z^2 = D = b^2 - 4ac$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

Pre $D \geq 0$ (reálny prípad):

$$(2a)^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2a \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{D}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \pm\sqrt{D}}{2a}$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

$$2a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = b^2-4ac$$

Pre $D<0$ potrebujeme riešiť $z^2=-(\sqrt{-D})^2$, teda

$$z_{1,2}=\pm i\sqrt{-D}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a}$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

Pre $D < 0$:

$$(2a)^2 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2a\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{-D}i$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{-D}i}{2a}$$

$$x = \frac{-b + \pm\sqrt{-D}i}{2a}$$

Kvadratické rovnice s reálnymi koeficientmi

Príklad

Riešme rovnicu $x^2 + 4x + 5 = 0$.
Dostaneme $D = 16 - 20 = -4$ a

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

$$(-2 + i) + (-2 - i) = -4$$
$$(-2 + i)(-2 - i) = 5$$

Kvadratické rovnice s komplexnými koeficientami

- Čo ak sú $a, b, c \in \mathbb{C}$ (nie nutne reálne)?
- Stále potrebujeme riešiť $z^2 = D$ pre $D = b^2 - 4ac$.
- Teraz je D nejaké komplexné číslo.

Binomické rovnice

Chceme riešiť

$$x^n = z$$

pre dané $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Binomické rovnice

$$x^n = z$$
$$r^n \left(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)\right) = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$r = \sqrt[n]{|z|}$$
$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k}{n}\pi$$

pre $k = 0, \ldots, n-1$.

Binomické rovnice

Príklad

$$x^4 = 1$$

$$x^4 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$r^4 = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[8]{2}$$

$$4\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}$$

Riešenia: $x = \sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2})\right)$ pre $k = 0, 1, 2, 3$.

Kvadratické rovnice

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Tu $\sqrt{D}$ chápeme tak, že zaň možno dosadiť ktorúkoľvek z druhých odmocnín čísla D. (T.j. ktorékoľvek riešenie rovnice $x^2 = D$.)

Kvadratické rovnice

Príklad

$$x^2 - (1+i)x - 2 - i = 0$$

Exponenciálny tvar komplexného čísla

Kvaternióny

Komplexné čísla sa nedajú usporiadať