Vektorové priestory

21. septembra 2023

Vektorové priestory

Definícia

Trojica $(V, +, \cdot)$ sa nazýva *vektorový priestor* nad poľom F ak V je množina, $+$ je binárna operácia na množine V a $\cdot$ priradí prvkom $c \in F$ a $\vec{v} \in V$ nejaký prvok $c \cdot \vec{v} \in V$ a súčasne platí:

(i) $(V, +)$ je komutatívna grupa.

(ii) Pre ľubovoľné $c, d \in F$, $\vec{v} \in V$ platí

$$(c + d)\vec{v} = c\vec{v} + d\vec{v}.$$

(iii) Pre ľubovoľné $c \in F$, $\vec{v}, \vec{w} \in V$ platí

$$c(\vec{v} + \vec{w}) = c\vec{v} + c\vec{w}.$$

Vektorové priestory

Definícia

(iv) Pre ľubovoľné $c, d \in F$, $\vec{v} \in V$ platí

$$c(d\vec{v}) = (cd)\vec{v}.$$

(v) Pre ľubovoľné $\vec{v} \in V$ platí

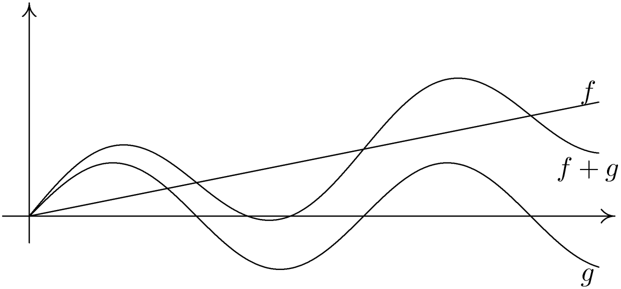
$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}.$$

Prvky množiny V zvyčajne voláme vektory *vektory*, prvky poľa F voláme *skaláry*.
Neutrálny prvok grupy $(V, +)$ sa zvykne nazývať *nulový vektor* a označovať $\vec{0}$. Inverzný prvok k $\vec{x}$ vzhľadom na operáciu $+$ sa zvykne označovať $-\vec{x}$.

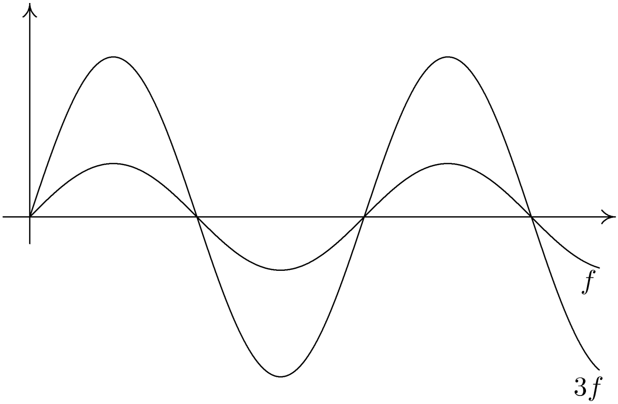
Príklady vektorových priestorov

- F^n pre ľubovoľné pole F a $n \in \mathbb{N}$
- Funkcie: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- Postupnosti: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- Teraz nás zaujíma: $\mathbb{R}$ ako vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$

Príklady vektorových priestorov



Príklady vektorových priestorov



$\mathbb{R}$ ako vektorový priestor nad $\mathbb{Q}$

- Vektory $V = \mathbb{R}$, skaláry $F = \mathbb{Q}$.
- Sčitovanie: $+ \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, násobenie: $\cdot \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- $(\mathbb{R}, +)$ je komutatívna grupa.
- Pre $c, d \in \mathbb{Q}$, $v, w \in \mathbb{R}$ platí

$$(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v$$
$$c \cdot (v + w) = c \cdot v + c \cdot w$$
$$c \cdot (d \cdot v) = (cd) \cdot v$$
$$1 \cdot v = v$$

Báza, dimenzia

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ sú *lineárne nezávislé,* ak z rovnosti

$$c_1 \vec{v}_1 + \cdots + c_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

vyplýva $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Báza, dimenzia

Definícia

Nech V je vektorový priestor nad poľom F. Pre vektory $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n \in V$ označujeme

$$[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n] = \{c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n; c_1,\dots,c_n \in F\}.$$

Táto množina tvorí vektorový podpriestor priestoru V a nazýva sa *lineárny obal* vektorov $v_1,\dots,v_n$.
Ak $[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n] = V$, tak hovoríme, že vektory $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ *generujú* priestor V.

Báza, dimenzia

Definícia

Vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ tvoria *bázu* vektorového priestoru V ak sú lineárne nezávislé a generujú V.

Ekvivalentne: každý vektor $\vec{x} \in V$ sa dá *jednoznačne* zapísať v tvare lineárnej kombinácie

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n.$$

Báza, dimenzia

- Počet prvkov bázy nazývame *dimenzia* priestoru V a označujeme $\dim(V)$.
- Ak existuje (konečná) báza priestoru V, tak V sa nazýva *konečnorozmerný*.
- Konečnorozmerný priestor je jeho dimenziou určený jednoznačne až na izomorfizmus – ak $\dim(V) = n$ tak $V \cong F^n$.

$\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nie je konečnorozmerný

- Kardinalita: Pre konečnorozmerné máme $|V| = |\mathbb{Q}^n| = \aleph_0$.
- Nájsť nekonečne veľa lineárne nezávislých vektorov: $\ln p$ pre všetky prvočísla p.