Relácie ekvivalencie

17. októbra 2024

Relácie

Relácia na množine A:

$$R \subseteq A \times A$$

Označenie: $(a, b) \in R$ alebo aRb

Relácie ekvivalencie

Relácia ekvivalencie = reflexívna, symetrická a tranzitívna

$$a \sim a$$
$$a \sim b \Rightarrow b \sim a$$
$$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$$

Relácie ekvivalencie

Príklad

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad 4 \mid a - b$$

Pre $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $a \sim b$ práve vtedy, keď tieto dve čísla nám dajú rovnaký zvyšok po delení číslom 4.

$$a \equiv b \pmod 4$$

Rozklady

Definícia

Ak $\sim$ je relácia ekvivalencie na množine A a $a \in A$, tak označíme

$$[a] = \{x \in A; x \sim a\}.$$

Množinu $[a]$ nazývame *trieda ekvivalencie prvku a.*

Rozklady

Veta

Ak $\sim$ je relácia ekvivalencie na množine A, tak množina všetkých tried ekvivalencie tvorí rozklad množiny A, t.j. platia nasledujúce podmienky:

- *Zjednotením všetkých tried ekvivalencie dostaneme celú množinu A.*
$$A = \bigcup_{a \in A} [a]$$
- *Jednotlivé triedy ekvivalencie sú po dvoch disjunktné, t.j. pre ľubovoľné $a, b \in A$ platí*
$$[a] = [b] \qquad \vee \qquad [a] \cap [b] = \emptyset.$$

$$A/\sim \, = \{[a]; a \in A\}$$

Rozklady

Príklad

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad 4 \mid a - b.$$

$$[0] = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$
$$[1] = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$
$$[2] = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$
$$[3] = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

Rozklady

- Relácia ekvivalencie na množine A určuje rozklad.
- Obrátene, ak máme daný rozklad, tak ten jednoznačne určuje reláciu ekvivalencie.
- Tieto dve priradenia sú navzájom inverzné. (T.j. je to bijektívna korešpondencia medzi rozkladmi a reláciami ekvivalencie.)

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad [a] = [b]$$

Dobre definovaná funkcia

$f : A \to B$

$$\overline{f} : A/\!\sim\, \to B$$
$$\overline{f} : [a] \mapsto f(a)$$

Dobre definovaná funkcia

$$a \sim b \qquad \Leftrightarrow \qquad 4 \mid a - b$$

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

$$[a] \mapsto a \bmod 2$$

je dobre definované zobrazenie.

$$[a] \mapsto a \bmod 3$$

nie je dobre definované zobrazenie.

Dobre definovaná funkcia

Tvrdenie

Nech $\sim$ je relácia ekvivalencie na množine A a $f\colon A \to B$ je zobrazenie. Predpokladajme navyše, že pre ľubovoľné $a_{1,2} \in A$ platí

$$a_1 \sim a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2). \tag{1}$$

Potom predpis

$$\overline{f}([a]) = f(a) \tag{2}$$

určuje dobre definované zobrazenie $\overline{f}\colon A/\!\sim\; \to B$.

Zlomky

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow ab' = a'b$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

Zlomky

$$\frac{a}{b} * \frac{a'}{b'} = \frac{a + a'}{b + b'}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{7}$$