Skonštruovateľné čísla – úvod

21. septembra 2023

Skonštruovateľné čísla

- Máme danú úsečku jednotkovej dĺžky, máme povolené používať iba konštrukcie pomocou pravíka a kružidla. Vieme zostrojiť ľubovoľné reálne číslo?
- Povieme si, čo sa o tomto probléme dá povedať pomocou kardinality a pojmu spočítateľnej množiny.
- A tiež čo vieme povedať pomocou rozšírení polí.

Skonštruovateľné čísla

$\mathbb{K}$ = dĺžky, ktoré vieme dostať z jednotkovej úsečky pravítkom a kružidlom.

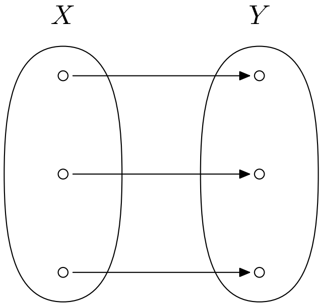
Pre $x, y \in \mathbb{K}$ aj

- $\frac{x+y}{2}$, $x + y$, $x - y$ sú skonštruovateľné;
- xy je skonštruovateľné;
- Ak $x \neq 0$, tak aj $\frac{1}{x}$ je skonštruovateľné;
- $\sqrt{xy}$ je skonštruovateľné.

Pojem kardinality

Vieme merať „veľkosť“ nekonečných množín?

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow \text{ existuje bijekcia medzi } X \text{ a } Y$$



Kardinality množín

Pre kardinalitu množín vieme zmysluplne zaviesť:

- porovnávanie, t.j. $|X| \leq |Y|$;
- sčitovanie, násobenie, umocňovanie.

Spočítateľné množiny

- Spočítateľná množina: $|X| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- Napríklad: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$
- Zjednotenie spočítateľne veľa spočítateľných množín je spočítateľná množina.
- Množina reálnych čísel nie je spočítateľná.

$$|\mathbb{R}| > \aleph_0.$$

Skonštruovateľné čísla

Množina $\mathbb{K}$ je spočítateľná.

- Každá konštrukcia má iba konečne veľa krokov.
- V každom kroku pridám najviac dva body.
- $\mathbb{K} = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$; zjednotenie spočítateľne veľa konečných množín.

$$\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$$

Témy týkajúce sa kardinality

- Rovnosť a porovnávanie kardinálnych čísel.
- Ako funguje sčitovanie, násobenie, umocňovanie.
- Reálnych čísel je viac ako prirodzených.
- Spočítateľné a nespočítateľné množiny.
- Existenčné dôkazy (transcendentné čísla; vypočítateľné čísla).

Skonštruovateľné čísla a polynómy

- Vieme skonštruovať napríklad $\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2}, \ldots$
- T.j. vlastne riešenia rovníc

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2 &= 0 \\
x^4 - 2 = x^2 - \sqrt{2} &= 0 \\
x^8 - 2 = x^2 - \sqrt[4]{2} &= 0
\end{aligned}
$$

- Robíme prienik dvoch kružníc, alebo priamky a kružnice – očakávali by sme niečo kvadratické.

$\sqrt[3]{2}$ sa nedá skonštruovať

Číslo $\sqrt[3]{2}$ je koreň ireducibilného polynómu

$$x^3 - 2 = 0.$$

Vedeli by sme ukázať, že pre skonštruovateľné číslo musí byť takýto polynóm stupňa 2^k?

Známe problémy

- Zdvojenie kocky: $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{K}$
- Kvadratúra kruhu: $\sqrt{\pi} \notin \mathbb{K}$
- Trisekcia uhla: $\cos \frac{\pi}{9} \notin \mathbb{K}$

Témy týkajúce polí a rozšírení polí

- Rôzne príklady a konštrukcie polí.
- Algebraické rozšírenia, minimálny polynóm.
- Ako vieme zdôvodniť, že $\sqrt[3]{2}$
- Ako vieme skonštruovať konečné polia (napríklad 4-prvkové pole).