Zobrazenia

27. septembra 2023

Plán

- Definovať $|X| = |Y|$ (pomocou bijekcie).
- Definovať $|X| \leq |Y|$ (pomocou injekcie).
- Chceme vedieť sčitovať, násobiť, umocňovať.
- Najprv: Pripomeňme niečo o zobrazeniach.

Funkcie

Definícia

Zobrazenie (*funkcia*) z množiny A do B je podmnožina $f \subseteq A \times B$ karteziánskeho súčinu množín A a B taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ s vlastnosťou $(a, b) \in f$.

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a, b) \in f$$

Zobrazenie f z A do B budeme označovať $f : A \to B$. Množinu A nazývame *definičný obor* a B *obor hodnôt* zobrazenia f.

Namiesto zápisu $(a, b) \in f$ budeme používať zápis $f(a) = b$.

Zúženie zobrazenia

Definícia

Ak $f\colon A \to B$ je zobrazenie a $C \subseteq A$, tak zobrazenie $f|_C\colon C \to B$, definované predpisom

$$f|_C(x) = f(x)$$

pre všetky $x \in C$, nazývame *zúženie zobrazenia* f na množinu C.

$$f|_C = f \cap (C \times B)$$

Prázdne zobrazenie

- Ak $X = \emptyset$ alebo $Y = \emptyset$, tak $X \times Y = \emptyset$.
- Teda ak $f \subseteq X \times Y$, tak $f = \emptyset$.
- Je $\emptyset \colon \emptyset \to \emptyset$ zobrazenie?
- Ak $X \neq \emptyset$, existuje zobrazenie $X \to \emptyset$?
- Ak $Y \neq \emptyset$, existuje zobrazenie $\emptyset \to Y$?

Prázdne zobrazenie

$$(\forall x \in A)P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow P(x))$$

$$(\exists x \in A)P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists x)(x \in A \wedge P(x))$$

$$(\forall x \in \emptyset)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \emptyset \Rightarrow P(x))$$

$$(\exists x \in \emptyset)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in \emptyset \wedge P(x))$$

Skladanie zobrazení

Definícia

Ak $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ sú zobrazenia, tak zložené zobrazenie $g \circ f\colon A \to C$ definujeme ako zobrazenie určené predpisom:

$$g \circ f(a) = g(f(a)) \text{ pre každé } a \in A.$$

Skladanie zobrazení

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & g(f(x)) \\
& f(x) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figure: Skladanie zobrazení

Injekcia, surjekcia a bijekcia

Definícia

Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie.

- f je *injektívne,* ak $(\forall x, y \in X)\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- f je *surjektívne,* ak $(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ f(x) = y$.
- f je *bijektívne,* ak je súčasne injektívne aj surjektívne.

Zloženie dvoch injekcií (surjekcií, bijekcií) je opäť injekcia (surjekcia, bijekcia).

Poznámka

Ekvivalentná definícia injekcie: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Injekcia, surjekcia a bijekcia

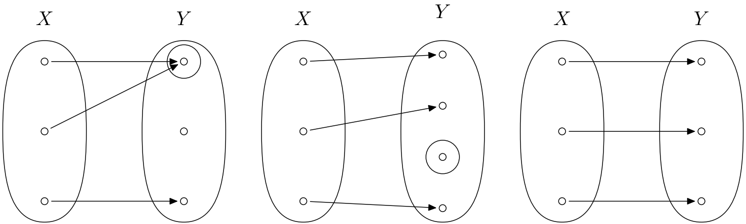

Figure: Ilustrácia injekcie, surjekcie a bijekcie

Injekcie, surjekcie, bijekcie a skladanie

Pre zobrazenia $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ platí:

- Ak f aj g sú injekcie, tak aj $g \circ f$ je injekcia.
- Ak f aj g sú surjekcie, tak aj $g \circ f$ je surjekcia.
- Ak f aj g sú bijekcie, tak aj $g \circ f$ je bijekcia.

Inverzné zobrazenie

Definícia

Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Ak existuje zobrazenie $g : B \to A$ také, že

$$g \circ f = id_A$$
$$f \circ g = id_B$$

tak hovoríme, že g je *inverzné zobrazenie* k zobrazeniu f a označujeme ho f^{-1}.

Definícia inverzného zobrazenia vlastne hovorí, že:

$$(\forall a \in A) g(f(a)) = a$$
$$(\forall b \in B) f(g(b)) = b$$

Inverzné zobrazenie

Tvrdenie

Nech $f: A \to B$ je zobrazenie. Potom inverzné zobrazenie $f^{-1}: B \to A$ existuje práve vtedy, keď f je bijekcia.

Karteziánsky súčin funkcií

Definícia

Nech $f\colon A \to C$, $g\colon B \to D$ sú zobrazenia. Potom ich *karteziánsky súčin* je zobrazenie $f \times g\colon A \times B \to C \times D$ určené predpisom

$$f \times g(a, b) = (f(a), g(b)).$$

Karteziánsky súčin funkcií

Tvrdenie

Nech $f: A \to C$, $g: B \to D$ sú zobrazenia.

i. Ak f aj g sú injekcie, tak $f \times g$ je injekcia.
ii. Ak f aj g sú surjekcie, tak $f \times g$ je surjekcia.
iii. Ak f aj g sú bijekcie, tak $f \times g$ je bijekcia.