Úvod

23. septembra 2024

Metrické priestory

Definícia

Nech X je množina. Zobrazenie $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ sa nazýva *metrika*, ak pre ľubovoľné $x, y \in X$ platí

(D1). $d(x, y) \geq 0$;
(D2). $d(x, y) = 0$ práve vtedy, keď $x = y$;
(D3). $d(x, y) = d(y, x)$
(D4). $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ak d je metrika na X, tak dvojicu (X, d) nazývame *metrický priestor*.

Metrické priestory

- uzáver = limity postupností
- spojitosť = sekvenciálna spojitosť
- kompaktnosť vs. existencia konvergentnej podpostupnosti
- spojitá funkcia nadobúda maximum a minimum

Topologické priestory

Centrálne pojmy tejto prednášky:

- spojitosť
- konvergencia
- kompaktnosť

postupnosti $\longrightarrow$ siete, filtre

Aplikácia – kompaktnosť a aproximácie

$$\ell_1 \subsetneq \ell_\infty^*$$

Existuje funkcionál $\varphi \in \ell_\infty^*$, ktorý rozširuje obvyklú limitu.

- Platí $\varphi \in \ell_\infty^* \setminus \ell_1$.
- Dá sa ukázať pomocou Hahn-Banachovej vety.
- My sa pozrieme na dôkaz pomocou kompaktnosti a konvergencie.

Aplikácia – kompaktnosť a aproximácie

$$\varphi_i\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$$
$$\varphi_i\colon x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto x_i$$

- Ležia v jednotkovej guli ℓ_∞, so slabou* topológiou dostaneme kompakt.
- Limita konvergentnej podsiete: $\varphi = \lim\limits_{d\in D} \varphi_{n_d}$

Aplikácia – kompaktnosť a aproximácie

$$\varphi = \lim_{d \in D} \varphi_{n_d}$$

- φ je lineárne
- $\|\varphi_n\| = 1 \Rightarrow \|\varphi\| = 1$
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
- Z $n_d \xrightarrow[d \in D]{} \infty$ máme $\varphi(e^{(i)}) = 0$

$$\varphi \in \ell_\infty^* \setminus \ell_1$$