Topologické priestory

23. septembra 2024

Definícia topológie

Definícia

Nech X je množina. Systém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *topológia* na množine X, ak platí:

(O1). $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(O2). Ak $A, B \in \mathcal{T}$, tak aj $A \cap B \in \mathcal{T}$.

(O3). Ak $A_i \in \mathcal{T}$ pre každé $i \in I$, tak aj $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Ak $\mathcal{T}$ je topológia na množine X, tak dvojicu $(X, \mathcal{T})$ nazývame *topologický priestor*. O množinách patriacich do $\mathcal{T}$ hovoríme, že sú to *otvorené množiny* v priestore $(X, \mathcal{T})$.

Definícia topológie

- Topológiu vieme zadať veľa inými spôsobmi – táto axiomatizácia je pomerne jednoduchá.
- Dá sa na to pozerať tak, že „meriame“ vzdialenosť nie číslom, ale väčšími a menšími otvorenými okoliami.

Príklady topológií

- $\mathcal{T}_{ind} = \{\emptyset, X\}$ = *indiskrétna topológia*
- $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(X)$ = *diskrétna topológia*
- Sierpińského priestor

Topológia odvodená od metriky

$$B(a,r) = \{x \in X; d(x,a) < r\}$$

- Bod $a \in U$ nazvime *vnútorný bod* množiny U, ak existuje reálne číslo $r > 0$ také, že $B(a,r) \subseteq U$.
- Ak každý bod množiny U je vnútorným bodom tejto množiny, tak hovoríme, že U je *otvorená v metrickom priestore* (X,d).

$$(X, \mathcal{T}_d)$$

Uzavreté množiny

Definícia

Nech X je topologický priestor a $C \subseteq X$.
Podmnožina C sa nazýva *uzavretá množina*, ak jej doplnok $X \setminus C$ je otvorená množina.
Ak C je súčasne otvorená aj uzavretá v X, nazveme ju *obojaká množina*.

Sets are not doors. They can be open, closed, both, or neither.
Neznámy autor

Uzavreté množiny

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Označme ako $\mathcal{C}$ systém všetkých uzavretých množín v X. Potom platí:

(C1). $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

(C2). *Ak* $A, B \in \mathcal{C}$ *tak,* $A \cup B \in \mathcal{C}$.

(C3). *Ak* $A_i \in \mathcal{C}$ *pre všetky* $i \in I$ *(pričom* $I \neq \emptyset$*), tak aj* $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$.

Uzavreté množiny

Tvrdenie

Nech X je ľubovoľná množina. Nech $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je systém množín, ktorý spĺňa podmienky (C1), (C2), (C3). *Potom*

$$\mathcal{T} = \{X \setminus C; C \in \mathcal{C}\}$$

je topológia na X.
Navyše, uzavreté množiny v $(X, \mathcal{T})$ sú presne množiny patriace do $\mathcal{C}$.

Kofinitná a kospočítateľná topológia

$$\mathcal{T}_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus F; F \text{ je konečná podmnožina } X\}$$

$$\mathcal{T}_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus F; F \text{ je spočítateľná podmnožina } X\}$$

Báza topológie

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ sa nazýva *báza topológie* $\mathcal{T}$, ak každá otvorená množina U je zjednotením nejakého systému množín patriacich do $\mathcal{B}$.

$$(\forall U \in \mathcal{T})(\exists \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}) U = \bigcup \mathcal{S}$$

- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, t.j. všetky bázové množiny sú otvorené.
- Ekvivalentne: Pre ľubovoľné $x \in X$ a jeho otvorené okolie U existuje $B \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in B \subseteq U$.

$$(\forall x \in U \in \mathcal{T})(\exists B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq U$$

Báza topológie

Veta

Ak $\mathcal{B}$ je báza nejakej topológie na X, tak platí:

(B1). *$\mathcal{B}$ pokrýva X, t.j.*

$$\bigcup \mathcal{B} = X.$$

(B2). *Ak $B_{1,2} \in \mathcal{B}$ obsahujú bod $x \in X$, tak existuje $B \in \mathcal{B}$ také, že $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

$$(\forall x \in X)[x \in B_{1,2} \in \mathcal{B} \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{B}) x \in B \subseteq B_1 \cap B_2]$$

Báza topológie

Obrátene, ak $\mathcal{B}$ je systém podmnožín množiny X, ktorý spĺňa $(\mathrm{B1})$ a $(\mathrm{B2})$, tak množina všetkých zjednotení podsystémov $\mathcal{B}$ tvorí topológiu $\mathcal{T}$ na X.

$$\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{C}; \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$$

Navyše, $\mathcal{B}$ je báza topológie $\mathcal{T}$.

Príklady báz

- $\mathcal{B}_{disc} = \{\{x\}; x \in X\}$
- $\mathcal{B}_{ind} = \{X\}$

Topológia odvodená od metriky

$$B(a, r) = \{x \in X; d(x, a) < r\}$$

$$\mathcal{B} = \{B(a, r); a \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$$

Označenie: $\mathcal{T}_d$
Iná báza: $\mathcal{B}' = \{B(a, r); a \in X, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$

Sorgenfreyova priamka

Sorgenfreyova priamka (Lower limit topology)
$X = \mathbb{R}$ s topológiou danou bázou

$$\mathcal{B} = \{\langle a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Označenie: $\mathbb{R}_l$ alebo $\mathcal{T}_l$.

- $\langle a, b)$ je obojaká
- $\mathcal{T}_e \subseteq \mathcal{T}_l$

Subbáza

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topológia a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Hovoríme, že $\mathcal{S}$ *subbáza* topológie $\mathcal{T}$, ak

$$\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{F}; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ je neprázdna konečná množina}\}$$

tvorí bázu topológie $\mathcal{T}$.

T.j. $\mathcal{S}$ je subbáza práve vtedy, keď prieniky konečne veľa množín z $\mathcal{S}$ tvoria bázu.

Subbáza

Veta

Ak $\mathcal{S}$ je subbáza nejakej topológie na X, tak platí:

(S1). *$\mathcal{S}$ pokrýva X, t.j.*

$$\bigcup \mathcal{S} = X.$$

Obrátene, ak $\mathcal{S}$ je systém podmnožín množiny X, ktorý spĺňa (S1), *tak množina všetkých prienikov konečných podsystémov systému $\mathcal{S}$, t.j.*

$$\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{F}; \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ je neprázdna konečná množina}\}$$

je bázou nejakej topológie na X.

Okolie bodu

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $x \in X$. Podmnožina $N \subseteq X$ sa nazýva *okolie bodu* x, ak existuje otvorená množina U taká, že $x \in U \subseteq N$. Ak navyše N je otvorená množina, voláme ho *otvorené okolie*.

Systém všetkých okolí bodu x budeme označovať ako $\mathcal{N}_x$, systém všetkých otvorených okolí bodu x budeme označovať $\mathcal{O}_x$.

Báza okolí

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $x \in X$. Nech $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$, t.j. $\mathcal{B}_x$ je nejaký systém pozostávajúci z okolí bodu x. Hovoríme, že $\mathcal{B}_x$ je *báza okolí v bode x*, ak pre ľubovoľnú otvorenú množinu U obsahujúcu x existuje $B \in \mathcal{B}_x$ tak, že $B \subseteq U$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_x)(\exists B \in \mathcal{B}_x) x \in B \subseteq U$$

- Otvorené gule tvoria bázu pre $\mathcal{T}_d$.
- Uzavreté intervaly v $\mathbb{R}$ (uzavreté gule v $\mathbb{R}^n$).

Báza okolí

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor a* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ *(t.j.* $\mathcal{B}$ *je nejaký systém otvorených množín). Potom* $\mathcal{B}$ *je báza topológie* X *práve vtedy, keď* $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B}; x \in B\}$ *je báza okolí bodu* x *(pre každý bod* $x \in X$*).*

Sorgenfreyova priamka

Príklad

$$\mathcal{B} = \{\langle a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_x &= \{\langle a, b); a, b \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \\
\mathcal{B}'_x &= \{\langle x, b); b \in \mathbb{R}; x < b\} \\
\mathcal{B}''_x &= \{\langle x, b); b \in \mathbb{Q}; x < b\}
\end{aligned}$$

Pre iracionálne x systém

$$\mathcal{C}_x = \{\langle a, b); a, b \in \mathbb{Q}; a \leq x < b\}$$

nie je báza okolí v bode x.

Báza okolí

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.
Nech pre každé $x \in X$ je $\mathcal{B}_x$ báza okolí v bode $x \in X$, ktorá pozostáva iba z otvorených množín t.j. $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$. Potom platí

(BO1). *Pre každé $B \in \mathcal{B}_x$ platí $x \in B$.*

(BO2). *Ak $U_{1,2} \in \mathcal{B}_x$, tak existuje $U \in \mathcal{B}_x$ také, že $U \subseteq U_1 \cap U_2$.*

(BO3). *Ak $y \in U \in \mathcal{B}_x$, tak existuje $V \in \mathcal{B}_y$ také, že $V \subseteq U$.*

Báza okolí

Veta

Obrátene, predpokladajme, že pre každý bod $x \in X$ máme priradený nejaký systém $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ a tieto systémy vyhovujú požiadavkam (BO1)–(BO3). *Potom*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$$

spĺňa podmienky (B1) *a* (B2), *je to teda báza nejakej topológie $\mathcal{T}$ na množine X. Navyše, pre túto topológiu $\mathcal{T}$ je jej lokálna báza v bode x práve $\mathcal{B}_x$.*

Moorova rovina

Príklad

Na $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 \geq 0\}$ vezmeme v bodoch $b = (b_1, b_2)$ s $b_2 > 0$ bázu určenú euklidovskou metrikou, t.j. $B(b,r) = \{(x_1, x_2) \in \Gamma; \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2} < r\}$, a pre body s nulovou druhou súradnicou:

$$\mathcal{B}_{(b_1,0)} = \{(b_1, 0)\} \cup \{\sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - r)^2} < r\}$$

Moorova rovina

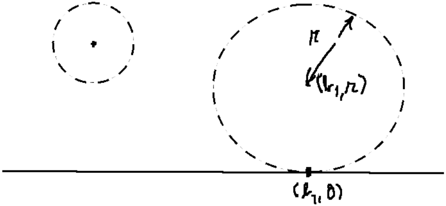

Figure: Bázové množiny v Mooreovej rovine.

Uzáver

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $A \subseteq X$. Potom množinu

$$\overline{A} = \bigcap \{C; A \subseteq C \subseteq X; C \text{ je uzavretá podmnožina } X\} \qquad (1)$$

nazývame *uzáver množiny A.*

Niekedy budeme používať aj označenie $\mathrm{cl}(A)$ resp. $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(A)$ – toto označenie bude užitočné najmä v prípade, ak budeme pracovať s uzávermi nejakej množiny v dvoch rôznych topológiách.

Uzáver

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor.

(i) *Pre ľubovoľné $A \subseteq X$ je množina $\overline{A}$ uzavretá.*

(ii) *Množina $A \subseteq X$ je uzavretá práve vtedy, keď $A = \overline{A}$.*

(iii) *Ak $A \subseteq C \subseteq X$ a C je uzavretá množina, tak $\overline{A} \subseteq C$.*

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, A, B sú podmnožiny X. Ak $A \subseteq B$, tak $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

$$A \subseteq B \qquad \Rightarrow \qquad \overline{A} \subseteq \overline{B} \tag{2}$$

Uzáver

Veta

Pre uzáver podmnožín topologického priestoru X platí:

(CL1). $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(CL2). $A \subseteq \overline{A}$;

(CL3). $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(CL4). $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

Obrátene, ak máme operátor $\overline{} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, *ktorý spĺňa podmienky* (CL1)–(CL4) *a ak definujeme*

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq X; \overline{A} = A\},$$

tak systém $\mathcal{C}$ *spĺňa podmienky* (C1)–(C3). *(Čiže množiny, pre ktoré platí* $A = \overline{A}$, *sú presne uzavreté množiny topológie* $\mathcal{T}$, *ktorú dostaneme ako doplnky takýchto množín.)*

Uzáver

- Popis „zhora“ vs. „zdola“
- V metrických priestoroch: Uzáver = limity postupností.
- V topologických priestoroch: Uzáver = limity sietí.

Uzáver

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $x \in X$, $A \subseteq X$.
Potom $x \in \overline{A}$ *práve vtedy, keď každé okolie* U *bodu* x *má neprázdny prienik s* A.

$$x \in \overline{A} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall U \in \mathcal{N}_x)(A \cap U \neq \emptyset)$$

Lokálne konečné systémy

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $\mathcal{S}$ je nejaký systém podmnožín množiny X. Systém $\mathcal{S}$ sa nazýva *lokálne konečný,* ak pre každý bod $x \in X$ existuje okolie $U \ni x$, ktoré má neprázdny prienik iba s konečne veľa množinami z $\mathcal{S}$. (T.j. množina $\{S \in \mathcal{S}; S \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná.)

Lokálne konečné systémy

Veta

Nech $\{A_i; i \in I\}$ *je lokálne konečný systém. Potom*

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Dôsledok

Zjednotenie lokálne konečného systému uzavretých množín je uzavretá množina.

Vnútro množiny

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $A \subseteq X$. Potom *vnútro množiny* A definujeme ako

$$\operatorname{Int} A = \bigcup \{U \subseteq A; U \text{ je otvorená v } X\}.$$

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, A je podmnožina X. Potom:

$$\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$$

$$\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}$$

Vnútro množiny

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $A, B \subseteq X$. Potom platí:

(i) *Ak $A \subseteq B$, tak $\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$.*

(ii) $\operatorname{Int} A \subseteq A$

(iii) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

(iv) *Množina $\operatorname{Int} A$ je otvorená. Pre každú otvorenú množinu $U \subseteq X$ platí $\operatorname{Int} U = U$.*

(v) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$

Husté množiny

Hustá polievka je taká, že kdekoľvek naberiem, tak je nejaký rezanec.
Hustá prednáška je taká, že kdekoľvek otvorím poznámky a ukážem prstom, tak je nejaké tvrdenie, ktorému nerozumiem.
Hustá množina je taká, že kdekoľvek sa pozriem, tak nájdem nejaké body z tejto množiny.

Neznámy autor

Husté množiny

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Podmnožina $D \subseteq X$ je *hustá* v X, ak $\overline{D} = X$, t.j. jej uzáver je celý priestor.

Hustú množinu môžeme ekvivalentne charakterizovať tak, že D pretína každú neprázdnu otvorenú množinu.

$$(\forall U \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}) D \cap U \neq \emptyset$$

V tejto podmienke sa namiesto celej topológie stačí obmedziť na množiny z nejakej bázy $\mathcal{B}$.

Husté množiny

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $U, D \subseteq X$. Ak D je hustá množina a U je otvorená množina, tak

$$\overline{U \cap D} = \overline{U}.$$