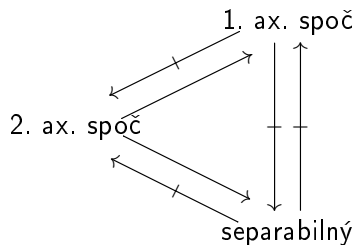
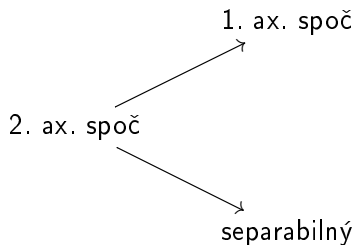


Separabilné priestory a axiomy spočítateľnosti

26. septembra 2021

Separabilnosť a axiomy spočítateľnosti



Prvá axioma spočítateľnosti	Každý bod má spočítateľnú bázu okolí.
Druhá axioma spočítateľnosti	Existuje spočítateľná báza topológie.
Separabilný priestor	Existuje spočítateľná hustá množina.

Prvá axioma spočítateľnosti

Definícia

Nech (X, \mathcal{T}) je topologický priestor. Ak pre každý bod $x \in X$ existuje spočítateľná báza okolí \mathcal{B}_x v bode x , tak hovoríme, že X spĺňa prvú axiому spočítateľnosti.

Anglicky: first countable space

- ▶ Metrické priestory: $\mathcal{B}_x = \{B(x, r); r \in \mathbb{Q}\}$
- ▶ Sorgenfreyova priamka \mathbb{R}_l

Druhá axioma spočítateľnosti

Definícia

Nech (X, \mathcal{T}) je topologický priestor. Ak existuje spočítateľná báza \mathcal{B} priestoru X , tak hovoríme, že X splňa *druhú axiomu spočítateľnosti*. Môžeme tiež stručne povedať, že X má *spočítateľnú bázu topológie*.

Anglicky: second countable space

Napríklad $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$

Druhá axioma spočítateľnosti

Tvrdenie

Ak X spĺňa druhú axiómu spočítateľnosti, tak X spĺňa prvú axiómu spočítateľnosti.

- ▶ (X, \mathcal{T}_{disc}) spĺňa druhú axiómu spočítateľnosti $\Leftrightarrow |X| \leq \aleph_0$.
- ▶ Sorgenfreyova priamka $\mathbb{R}_l = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ nespĺňa druhú axiómu spočítateľnosti.

Separabilné priestory

Definícia

Nech (X, \mathcal{T}) je topologický priestor. Hovoríme, že X je *separabilný*, ak existuje spočítateľná množina $A \subseteq X$ taká, že $\overline{A} = X$.

- ▶ Diskrétny priestor (X, \mathcal{T}_{disc}) je separabilný práve vtedy, keď X je spočítateľná množina.
- ▶ Reálne čísla s obvyklou topológiou $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$

Separabilné priestory

Tvrdenie

Ak X spĺňa druhú axiómu spočítateľnosti, tak je separabilný.

Obrátene to neplatí: Sorgenfreyova priamka, Mooreova rovina

Separabilné metrizable priestory

Tvrdenie

Ak X je separabilný metrizable priestor, tak X má spočítateľnú bázu topológie.

Teda ak X je metrizable, tak platí: X je separabilný práve vtedy, keď X spĺňa druhú axiómu spočítateľnosti.

Separabilné priestory

- ▶ Priestory ℓ_p , $1 < p < \infty$ a aj c a c_0 so suprémovou normou sú separabilné.
- ▶ Priestor ℓ_∞ so suprémovou normou nie je separabilný.