Spojitosť

4. októbra 2020

Spojitosť v bode

Metrické priestory: $f\colon (X,d) \to (Y,d')$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Spojitosť v bode

Definícia

Nech $f : X \to Y$ je funkcia, pričom X a Y sú topologické priestory. Nech $a \in X$. Hovoríme, že f je *spojitá v bode* a, ak pre ľubovoľné otvorené okolie V bodu $f(a)$ existuje otvorenú okolie U bodu a také, že $f[U] \subseteq V$.

$$(\forall V \in \mathcal{O}_{f(a)})(\exists U \in \mathcal{O}_a) f[U] \subseteq V \tag{1}$$

Spojitosť v bode

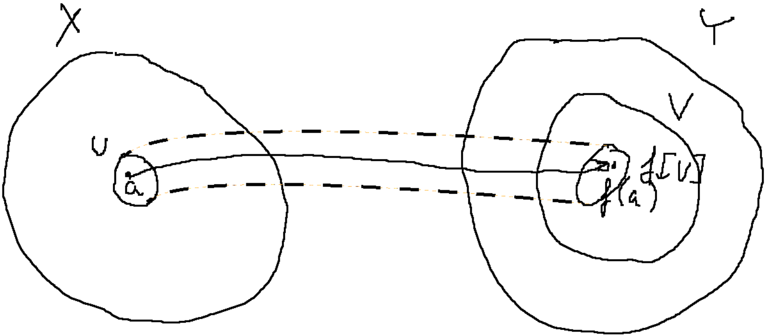

Figure: Definícia spojitosti v bode

Spojitosť v bode

Stačí brať bázu okolí:

$$(\forall V \in \mathcal{B}_{f(a)})(\exists U \in \mathcal{B}_a) f[U] \subseteq V$$

Vzory otvorených množín

Definícia

Nech X, Y sú topologické priestory. Funkcia $f: X \to Y$ je *spojitá*, ak je spojitá v každom bode $a \in X$.

Veta

Nech X, Y sú topologické priestory a $f: X \to Y$ je zobrazenie. Zobrazenie f je spojité práve vtedy, keď pre každú otvorenú množinu U v priestore Y je aj jej vzor $f^{-1}[U]$ otvorená množina v X.

$$(\forall U \in \mathcal{T}_Y) f^{-1}[U] \in \mathcal{T}_X$$

Príklady spojitých funkcií

- $f : (X, \mathcal{T}_{disc}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$
- $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_{ind})$
- konštantná funkcia
- $id_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (\mathcal{T}_2) \Leftrightarrow \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$

Vzory bázových množín

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, $\mathcal{B}$ je báza $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{S}$ je subbáza $\mathcal{T}_Y$. Nech $f\colon X \to Y$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *f je spojité zobrazenie.*

(ii) *Pre každé $V \in \mathcal{B}$ je $f^{-1}[V]$ otvorená množina*

(iii) *Pre každé $W \in \mathcal{S}$ je $f^{-1}[W]$ otvorená množina*

Príklad

$f^{-1}[(-\infty, b)]$ aj $f^{-1}[(a, \infty)]$ pre $a, b \in \mathbb{R}$.

Zloženie spojitých zobrazení

Veta

Nech $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *sú spojité zobrazenia medzi topologickými priestormi. Potom aj zložené zobrazenie* $g \circ f : X \to Z$ *je spojité.*

Obraz uzáveru

Tvrdenie

Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi X a Y. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *Zobrazenie f je spojité.*

(ii) *Pre každú uzavretú podmnožinu C v priestore Y je aj jej vzor $f^{-1}[C]$ uzavretá množina.*

(iii) *Pre ľubovoľné $A \subseteq X$ platí $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.*

Obraz uzáveru

$$C = \overline{f[A]}$$

$$f^{-1}[C] = f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]] \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

$$f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$$

Obraz uzáveru

$$A = f^{-1}[C]$$

$$f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]} = \overline{f[f^{-1}[C]]} \subseteq \overline{C} = C$$

$$f^{-1}[C] \subseteq \overline{f^{-1}[C]} \subseteq f^{-1}[C]$$

$$f^{-1}[C] = \overline{f^{-1}[C]}$$

Obraz hustej množiny

Dôsledok

Nech X, Y sú topologické priestory a $f\colon X \to Y$ je spojité surjektívne zobrazenie. Ak D je hustá množina v X, tak $f[D]$ je hustá množina v Y.

Definícia

Priestor Y nazývame *spojitým obrazom* priestoru X, ak existuje spojité surjektívne zobrazenie $f\colon X \to Y$.

Dôsledok

Spojitý obraz separabilného priestoru je separabilný priestor.