Homeomorfizmy

27. septembra 2021

Definícia homeomorfizmu

Definícia

Zobrazenie $h\colon X \to Y$ medzi topologickými priestormi $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sa nazýva *homeomorfizmus,* ak h je bijektívne, spojité a aj f^{-1} je spojité.

$$U \in \mathcal{T}_X \Leftrightarrow h[U] \in \mathcal{T}_Y$$
$$V \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow h^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$$

Homeomorfné priestory

Definícia

Topologické priestory $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nazveme *homeomorfné,* ak existuje homeomorfizmus $h\colon X \to Y$.
Označenie: $(X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$ alebo stručnejšie $X \cong Y$.

- $X \cong X$;
- $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$
- $X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$

Topologické vlastnosti

Definícia

Vlastnosť P topologických priestorov sa nazýva *topologická vlastnosť*, ak pre ľubovoľné dva priestory X a Y, ktoré sú homeomorfné, platí že X má vlastnosť P práve vtedy, keď Y má vlastnosť P.

Termín topologická vlastnosť teda používame pre vlastnosti, ktoré sa prenášajú homeomorfizmami.

Intervaly

- $\langle a, b\rangle \cong \langle c, d\rangle$
- $(a, b) \cong (c, d)$
- $\langle 0, 1\rangle \ncong (0, 1)$ resp. $\langle 0, 1\rangle \ncong \mathbb{R}$

Intervaly a $\mathbb{R}$

$$(0,1) \cong (a,b) \cong (a,\infty) \cong (-\infty,b) \cong \mathbb{R}$$

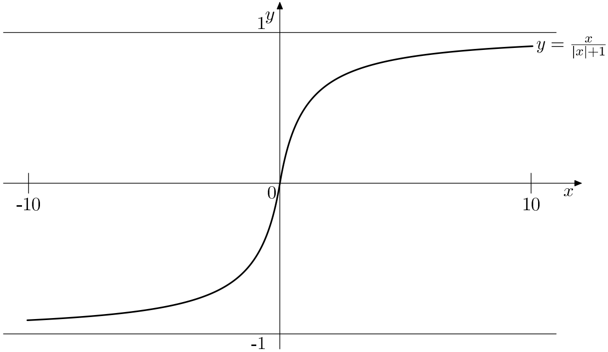


Figure: Príklad homeomorfizmu medzi $\mathbb{R}$ a $(-1,1)$

Interval a kružnica

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 1\}$$

$$(0, 1) \cong S \setminus \{x_0\}$$

$$h(t) = (\cos t, \sin t)$$
$$d(h(t_1), h(t_2)) = \left|2 \sin \frac{t_1 - t_2}{2}\right|$$

Interval a kružnica

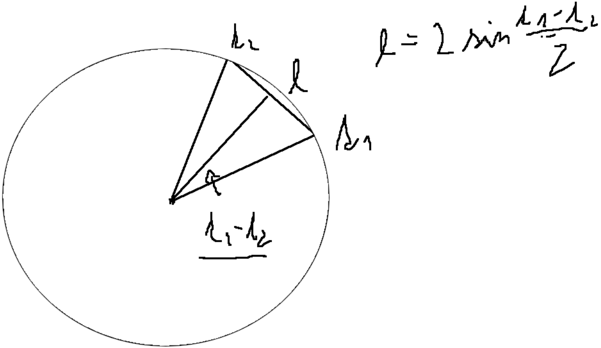
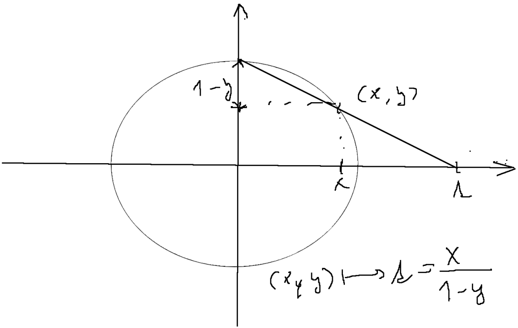


Figure: Vzdialenosť dvoch bodov na kružnici.

Stereografická projekcia

$S \setminus \{x_0\} \cong \mathbb{R}$



$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$$

Stereografická projekcia

$$S \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{x}{1-y}$$

$$t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$$

Stereografická projekcia

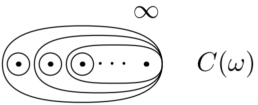
$$(x, y) \mapsto \frac{x}{1-y}$$

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_n}, \frac{x_2}{1-x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n} \right)$$

Priestor $C(\omega)$

- $X = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$
- $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ pre $x \neq \infty$
- $\mathcal{B}_\infty =$ doplnky konečných množín



$$C(\omega) \cong \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Otvorené a uzavreté zobrazenia

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory, $f\colon X \to Y$ je zobrazenie.
Zobrazenie f je *otvorené*, ak pre každdú otvorenú množinu $U \in \mathcal{T}_X$ je jej obraz $f[U]$ otvorená množina v priestore Y.
Zobrazenie f je *uzavreté*, ak pre každdú otvorenú podmnožinu C priestoru X je aj $f[C]$ uzavretá (množina v priestore Y).

Na to, aby bolo zobrazenie otvorené, stačí aby boli otvorené obrazy bázových množín

Otvorené a uzavreté zobrazenia

Tvrdenie

Nech $f\colon (X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ *je bijekcia. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

a) Zobrazenie f *je otvorené.*

b) Zobrazenie f *je uzavreté.*

c) Zobrazenie f^{-1} *je spojité.*

Otvorené a uzavreté zobrazenia

Dôsledok

Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom platí:

a) Zobrazenie f je homeomorfizmus práve vtedy, keď f je bijektívne, spojité a otvorené.

b) Zobrazenie f je homeomorfizmus práve vtedy, keď f je bijektívne, spojité a uzavreté.