Podpriestory

16. októbra 2024

Topologické konštrukcie

- podpriestor
- faktorový priestor
- topologický súčet
- topologický súčin
- Zovšeobecnenie: Iniciálna a finálna topológia.

Definícia podpriestoru

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $S \subseteq X$. Ak položíme

$$\mathcal{T}_S = \{U \cap S; U \in \mathcal{T}\},$$

tak $\mathcal{T}_S$ je tiež topológia.
Dvojicu $(S, \mathcal{T}_S)$ nazývame *podpriestor* topologického priestoru X.
Topológiu $\mathcal{T}_S$ budeme tiež nazývať *relatívna topológia.*
Ak S je otvorená podmnožina v X, hovoríme o *otvorenom podpriestore.* Podobne, S je *uzavretý podpriestor,* ak S je uzavretá podmnožina.

Báza, uzáver, vnútro

- báza $\mathcal{B}_S = \{U \cap S; U \in \mathcal{B}\}$
- báza okolí $\mathcal{B}'_x = \{B \cap S; B \in \mathcal{B}_x\}$
- uzavretosť: $C = C' \cap X$.
- $\mathrm{cl}_S(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap S$
- $\mathrm{Int}_S(A) = \mathrm{Int}_X(A) \cap S$

Podpriestor

Príklad

- podpriestor diskrétneho priestoru
- podpriestor indiskrétneho priestoru
- podpriestor metrického priestoru

$$B_S(x,r) = \{y \in S; d(x,y) < r\} = B(x,r) \cap S.$$

Podpriestor

Tvrdenie

Ak S je podpriestor priestoru T a T je podpriestor priestoru X, tak S je podpriestor priestoru X.
Ak S, T sú podpriestory priestoru X a $S \subseteq T$, tak aj S je podpriestor priestoru T.

Podpriestor

Tvrdenie

Nech $f: X \to Y$ *je zobrazenie. Nech* S *je podpriestor priestoru* X *a nech* T *je podpriestor priestoru* Y. *Predpokladajme ďalej, že* $f[S] \subseteq T$. *Potom:*

a) Ak $f: X \to Y$ *je spojité zobrazenie, tak aj zúženie* $f|_S: S \to Y$ *je spojité zobrazenie.*

b) Zobrazenie $f: X \to Y$ *je spojité práve vtedy, keď* $f: X \to T$ *je spojité.*

Definícia vloženia

Definícia

Nech $i\colon S \to X$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi S a X nazveme *vloženie* ak $i\colon S \to i[S]$ je homeomorfizmus medzi S a podpriestorom $i[S]$ priestoru X. Označujeme $i\colon S \hookrightarrow X$.

Vloženie

Tvrdenie

Nech $S \subseteq X$*, pričom* $(S, \mathcal{T}_S)$ *a* $(X, \mathcal{T}_X)$ *sú topologické priestory. Definujme* $i\colon S \to X$ *ako* $i(x) = x$ *pre všetky* $x \in S$*. Potom platí:* $(S, \mathcal{T}_S)$ *je podpriestor priestoru* $(X, \mathcal{T})$ *práve vtedy, keď* $i\colon (S, \mathcal{T}_S) \hookrightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ *je vloženie.*

Vloženie

Tvrdenie

Ak $f\colon X \hookrightarrow Y$ *aj* $g\colon Y \hookrightarrow Z$ *sú vloženia, tak aj zložené zobrazenie* $g \circ f\colon X \to Z$ *je vloženie.*

Dôsledok

Ak $f\colon X \hookrightarrow Y$ *je vloženie a* S *je podpriestor priestoru* X*, tak aj zúženie* $f|_S\colon S \to Y$ *je vloženie.*

Vloženie

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, S je jeho podpriestor. Nech $i_S : S \hookrightarrow X$ je vloženie S do X.
Nech Y je topologický priestor a $g : Y \to S$ je zobrazenie. Potom g je spojité práve vtedy, keď $e \circ g$ je spojité.

Dedičné vlastnosti

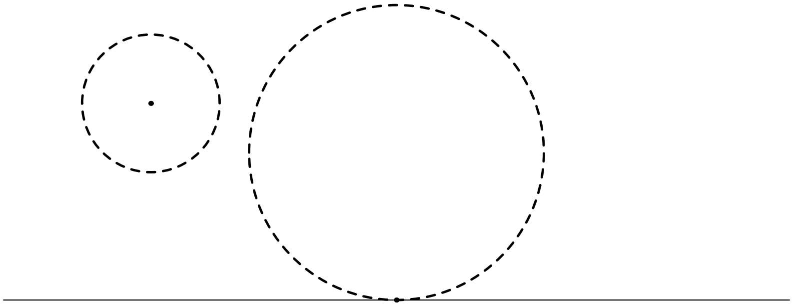
Definícia

Topologickú vlastnosť P (resp. triedu topologických priestorov) nazveme *dedičná*, ak pre každý priestor s vlastnosťou P má vlastnosť P aj každý jeho podpriestor.
O *otvoreno (uzavreto) dedičnej* vlastnosti hovoríme, ak to platí pre otvorené (uzavreté) podpriestory.

Axiómy spočítateľnosti

- Podpriestor priestoru spĺňajúceho prvú axiómu spočítateľnosti tiež spĺňa prvú axiómu spočítateľnosti.
- Podpriestor priestoru spĺňajúceho druhú axiómu spočítateľnosti tiež spĺňa druhú axiómu spočítateľnosti.
- Podpriestor separabilného priestoru nemusí byť separabilný. (Moorova rovina nie je dedične separabilný priestor.)

Moorova rovina



Pokrytie

Definícia

Nech X je topologický priestor. Systém $\mathcal{C} = \{C_i; i \in I\}$ podmnožín množiny X sa nazýva *pokrytie* priestoru X ak

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} A_i = X.$$

Ak každý prvok z $\mathcal{C}$ je otvorená množina, tak $\mathcal{C}$ je *otvorené pokrytie.*
Ak každý prvok z $\mathcal{C}$ je uzavretá množina, tak $\mathcal{C}$ je *uzavreté pokrytie.*
Ak $\mathcal{C}$ je lokálne konečný systém, tak $\mathcal{C}$ je *lokálne konečné pokrytie.*

Otvorené pokrytie

Tvrdenie

Nech $\{U_i; i \in I\}$ je otvorené pokrytie topologického priestoru X. Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie do topologického priestoru Y. Ak pre každé $i \in I$ je zúženie $f|_{U_i}\colon U_i \to Y$ spojité, tak aj zobrazenie f je spojité.

$$f^{-1}[V] = \bigcup_{i\in I}(f^{-1}[V] \cap U_i) = \bigcup_{i\in I}(f|_{U_i})^{-1}[V]$$

Lokálne konečné uzavreté pokrytie

Tvrdenie

Nech X, Y je topologický priestor a $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Nech $\{C_i; i \in I\}$ je lokálne konečné uzavreté pokrytie priestoru X. Ak pre každé $i \in I$ je zúženie $f|_{C_i}\colon C_i \to Y$ spojité, tak aj zobrazenie $f\colon X \to Y$ je spojité.

$$f^{-1}[C] = \bigcup_{i\in I}(f^{-1}[C] \cap C_i) = \bigcup_{i\in I}(f|_{C_i})^{-1}[C]$$