Faktorové zobrazenia

28. októbra 2024

Relácie ekvivalencie a surjektívne zobrazenia

- Surjekcia $f\colon X \to Y$ dáva reláciu ekvivalencie
$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2),$$
triedy sú $f^{-1}(y)$.
- Ak $\sim$ je relácia ekvivalencie, tak pre faktorovú množinu $X/\sim = \{[x]; x \in X\}$ dostaneme surjekciu
$$p\colon X \to X/\sim$$
$$p\colon x \mapsto [x]$$
- Teda každú reláciu ekvivalencie viem určiť surjektívnym zobrazením a obrátene, každá relácia ekvivalencie mi dáva isté kanonické surjektívne zobrazenie.

Topológia z relácie ekvivalencie

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ *je topologický priestor a* $\sim$ *je relácia na množine* Y*. Označme* $p\colon X \to X/\sim$ *zobrazenie definované ako* $p(x) = [x]$*. Ak položíme*

$$\mathcal{T}_\sim = \{V \subseteq X/\sim; p^{-1}[V] \in \mathcal{T}\},$$

tak $\mathcal{T}_\sim$ *je topológia na množine* X*.*
Topologický priestor $(X/\sim, \mathcal{T}_\sim)$ *budeme nazývať faktorový priestor priestoru* X *podľa relácie* $\sim$*.*

$p\colon X \to X/\sim$ je surjekcia a platí:

$$V \in \mathcal{T}_\sim \qquad \Leftrightarrow \qquad p^{-1}[V] \in \mathcal{T}.$$

Topológia z relácie ekvivalencie

Tvrdenie

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $f : X \to Y$ je surjektívne zobrazenie. Systém

$$\mathcal{T}' = \{V \subseteq Y; f^{-1}[V] \in \mathcal{T}\}$$

tvorí topológiu na množine Y.

Definícia faktorového zobrazenia

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T}_X)$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ sú topologické priestory a $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ je zobrazenie. Zobrazenie f je *faktorové zobrazenie* ak f je surjektívne a platí (pre každé $V \subseteq Y$)

$$V \in \mathcal{T}_Y \qquad \Leftrightarrow \qquad f^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X. \tag{1}$$

Tiež v takomto prípade povieme, že Y je *faktorový priestor* priestoru X.

Kružnica

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

- $f : I \to S,\ f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
- $g : \mathbb{R} \to S,\ g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

Valec

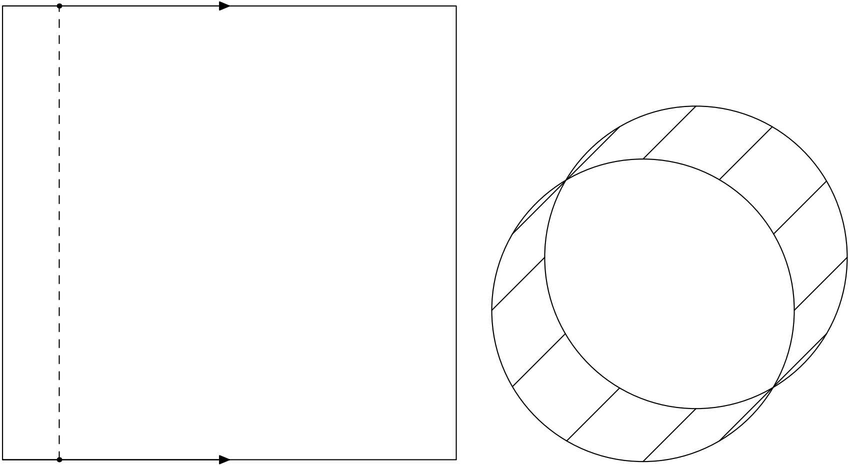
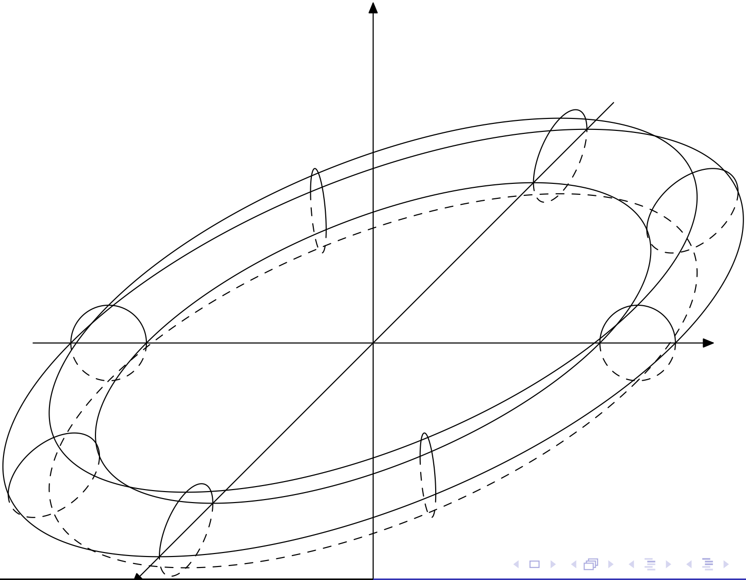


Figure: Valec ako faktorový priestor štvorca.

Tórus



Tórus

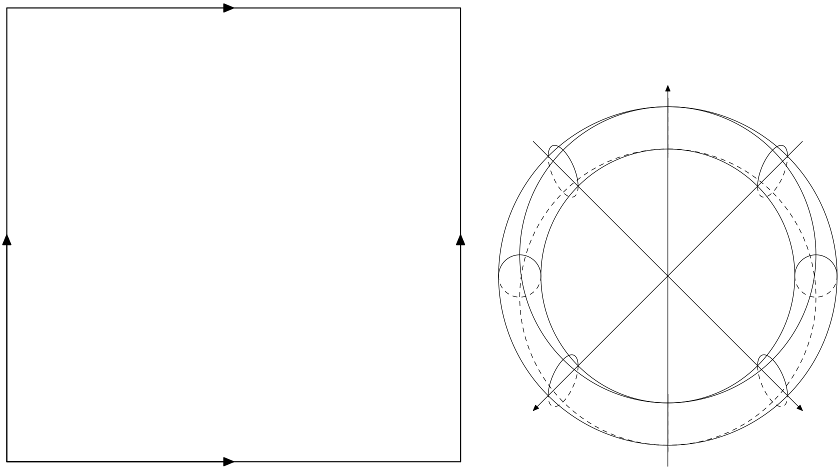


Figure: Tórus ako faktorový priestor štvorca.

Möbiov pásik

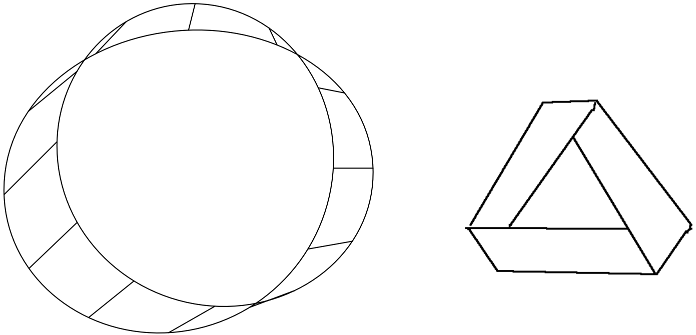


Figure: Möbiov pásik.

Möbiov pásik

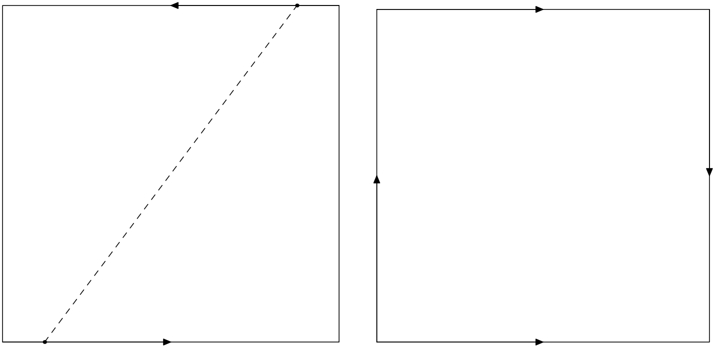


Figure: Möbiov pásik a Kleinovu fľašu dostaneme zo štvorca

Faktorové zobrazenia a spojitosť

Tvrdenie

Nech $q\colon X \to Y$ je faktorové zobrazenie. Nech Z je topologický priestor a $f\colon Y \to Z$ je zobrazenie. Potom zobrazenie f je spojité práve vtedy, keď zloženie $f \circ q$ je spojité.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "f\circ q"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$$(f \circ q)^{-1}[V] = q^{-1}[f^{-1}[V]]$$

Vzor uzavretej množiny

Tvrdenie

Nech $f: X \to Y$ je surjektívne zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom f je faktorové zobrazenie práve vtedy, keď pre ľubovoľné $C \subseteq Y$ platí: Množina $f^{-1}[C]$ je uzavretá v X práve vtedy, keď množina C je uzavretá v Y.

$$f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A]$$

Zloženie faktorových zobrazení

Tvrdenie

Ak $f\colon X \to Y$ *a* $g\colon Y \to Z$ *sú faktorové zobrazenia, tak aj ich zloženie* $g \circ f\colon X \to Z$ *je faktorové.*

$$V \in \mathcal{T}_Z \Leftrightarrow g^{-1}[V] \in \mathcal{T}_Y \Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}[V] = f^{-1}[g^{-1}[V]] \in \mathcal{T}_X$$

Otvorené a uzavreté surjekcie

Tvrdenie

Ak $f : X \to Y$ je surjektívne, spojité a otvorené zobrazenie, tak f je faktorové zobrazenie.
Ak $f : X \to Y$ je surjektívne, spojité a uzavreté zobrazenie, tak f je faktorové zobrazenie.

$$f[f^{-1}[A]] = A$$

Uzavreté surjekcie

Neskôr budeme mať:

- Spojitý obraz kompaktného priestoru je kompaktný.
- Ak X je kompaktný priestor, Y je Hausdorffovský priestor a $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazenie, tak f je aj uzavreté zobrazenie.
- Napríklad $I = \langle 0, 1\rangle$ je kompaktný.

Priestor $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

X/A

$$x \sim y \Leftrightarrow (x = y) \vee (x, y \in A)$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ = stotožnil som všetky celé čísla do jedného bodu

Priestor $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

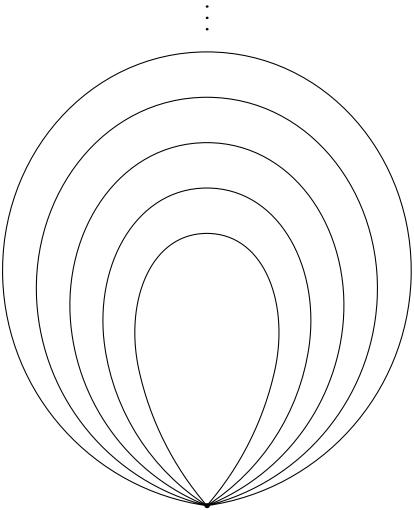


Figure: Faktorový priestor $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Priestor $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$Y = \{\infty\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\}$

$$q(x) = \begin{cases} \infty & \text{ak } x \in \mathbb{Z}, \\ x & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- separabilný
- ∞ nemá spočítateľnú bázu okolí

The space $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

X/A

$$x \sim y \Leftrightarrow (x = y) \vee (x, y \in A)$$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ = all integers identified into a single point

The space $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

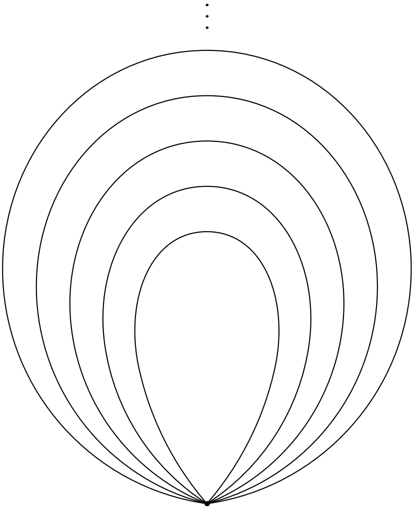


Figure: The quotient space $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

The space $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$Y = \{\infty\} \cup \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\}$

$$q(x) = \begin{cases} \infty & \text{ak } x \in \mathbb{Z}, \\ x & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- separable
- ∞ does not have a countable neighborhood base