Topologický súčet

16. októbra 2024

Topologický súčet

Štyri základné konštrukcie:

- podpriestor (vloženie)
- faktorový priestor (faktorové zobrazenie)
- **topologický súčet**
- topologický súčin

Topologický súčet

Definícia

Nech pre každé $i \in I$ je $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologický priestor, pričom navyše množiny X_i sú po dvoch *disjunktné*. Potom na množine $X = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ definujeme topológiu $\mathcal{T}$ ako

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i; (\forall i \in I) U \cap X_i \in \mathcal{T}_i\},$$

t.j. za otvorené prehlásime tie množiny, pre ktoré je prienik s X_i otvorený v X_i (pre všetky $i \in I$).
Priestor $(X, \mathcal{T})$ nazývame *topologický súčet* priestorov $(X_i, \mathcal{T}_i)$ a označujeme $\coprod\limits_{i\in I} X_i$.

Topologický súčet

Tvrdenie

Nech $\{X_i; i \in I\}$ je systém po dvoch disjunktných topologických priestorov a $X = \coprod_{i \in I} X_i$ je ich topologický súčet.

Potom každé X_i je obojakým podpriestorom priestoru X_i.

Topologický súčet

Tvrdenie

Nech $X = \coprod_{i \in I} X_i$ *a nech* $e_i \colon X_i \hookrightarrow X$ *označuje vloženie priestorov* X_i *do ich topologického súčtu. Nech* $f \colon X \to Y$ *je zobrazenie do topologického priestoru* Y*.*
Potom f *je spojité práve vtedy, keď pre každé* $i \in I$ *je zobrazenie* $f|_{X_i} = f \circ e_i$ *spojité.*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, hook, "e_i"] \arrow[dr, "f\circ e_i"'] & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Topologický súčet

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, hook, "e_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[d, "[f_i]"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je $f_i \colon X_i \to Y$ spojité zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom aj zobrazenie $[f_i] \colon \coprod_{i\in I} X_i \to Y$ je spojité.

Topologický súčet

Tvrdenie

Nech $X = \coprod_{i \in I} X_i$ *a nech* $e_i \colon X_i \hookrightarrow X$ *označuje vloženie priestorov* X_i *do ich topologického súčtu. Nech* Y *je topologický priestor a pre každé* $i \in I$ *máme dané spojité zobrazenie* $f_i \colon X_i \to Y$
Potom existuje jednoznačne určené spojité zobrazenie $\overline{f} \colon \coprod_{i \in I} X_i \to Y$ *také, že pre každé* $i \in I$ *platí*

$$\overline{f} \circ e_i = f_i,$$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, hook, "e_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod_{i \in I} X_i \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Topologický súčet

$$h\colon \coprod_{i\in I} X_i \to \coprod_{i\in I} Y_i$$

$$h(x) = f_i(x) \qquad \text{ak } x \in X_i$$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, hook, "e_i"'] & Y_i \arrow[d, hook, "e'_i"] \\ \coprod X_i \arrow[r, "\coprod f_i"'] & \coprod Y_i \end{tikzcd}$$

Topologický súčet

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, hook, "e_i"'] & Y_i \arrow[d, hook, "e_i'"] \\ \coprod X_i \arrow[r, "\coprod f_i"'] & \coprod Y_i \end{tikzcd}$$

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je $f_i\colon X_i \to Y_i$ spojité zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom aj zobrazenie $\coprod\limits_{i\in I} f_i\colon \coprod\limits_{i\in I} X_i \to \coprod\limits_{i\in I} Y_i$ je spojité.