Topologický súčin

17. októbra 2024

Topologický súčin

Štyri základné konštrukcie:

- podpriestor (vloženie)
- faktorový priestor (faktorové zobrazenie)
- topologický súčet
- **topologický súčin**

Súčin dvoch množín

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2); x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

$p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ a $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$

$$p_1(x_1, x_2) = x_1$$
$$p_2(x_1, x_2) = x_2$$

Iné označenie: $p_A : A \times B \to A$, kde $p_A(a, b) = a$

Súčin dvoch množín

Z $f_1\colon X \to Y_1$ a $f_2\colon X \to Y_2$ dostávame $g\colon X \to Y_1 \times Y_2$:

$$g(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Označenie: $\langle f_1, f_2\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "\langle f_1, f_2\rangle"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
Y_1 & Y_1 \times Y_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y_2
\end{tikzcd}$$

Súčin dvoch množín

Ak máme $f_1\colon X_1 \to Y_1$ a $f_2\colon X_2 \to Y_2$:

$$f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$
$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d, "p_i"'] & Y_1 \times Y_2 \arrow[d, "p_i'"] \\ X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Ak f_1, f_2 sú injekcie (surjekcie, bijekcie), tak aj $f_1 \times f_2$ je injekcia (surjekcia, bijekcia).

Súčin systému množín

Definícia

Ak pre každé $i \in I$ máme danú množinu X_i ich *karteziánsky súčin* definujeme ako množinu všetkých zobrazení z I do $\bigcup_{i \in I} X_i$ takých, že pre všetky $i \in I$ platí $f(i) \in X_i$.

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i ; (\forall i \in I) f(i) \in X_i\}$$

projekcie $p_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$:

$$p_i(f) = f(i)$$

Súčin systému množín

Ak máme pre každé $i \in I$ zobrazenie $f_i \colon X \to Y_i$ tak dostaneme

$$\langle f_i \rangle \colon X \to \prod Y_i$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\langle f_i \rangle"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod Y_i \arrow[d, "p_i"] \\ & Y_i \end{tikzcd}$$

Súčin systému množín

Ak máme pre každé $i \in I$ zobrazenie $f_i \colon X_i \to Y_i$, tak dostaneme

$$h = \prod_{i \in I} f_i \colon \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$$

$$\begin{tikzcd} \prod X_i \arrow[r, "\prod f_i"] \arrow[d, "p_i"'] & \prod Y_i \arrow[d, "p_i'"] \\ X_i \arrow[r, "f_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$

Ak všetky f_i sú injekcie (surjekcie, bijekcie), tak aj $\prod\limits_{i \in I} f_i$ je injekcia (surjekcia, bijekcia).

Definícia súčinu

Definícia

Nech $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$ sú topologické priestory. Položme

$$\mathcal{B} = \{U \times V; U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}.$$

Potom $\mathcal{B}$ je báza nejakej topológie $\mathcal{T}$ na karteziánskom súčine $X_1 \times X_2$. Túto topológiu nazývame *súčinová topológia* a priestor $(X_1 \times X_2, \mathcal{T})$ nazývame *topologický súčin* priestorov $(X_1, \mathcal{T}_1)$ a $(X_2, \mathcal{T}_2)$. Túto topológiu budeme niekedy označovať ako $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

$$\mathcal{B}' = \{U \times V; U \in \mathcal{B}_1, V \in \mathcal{B}_2\}$$

Definícia súčinu

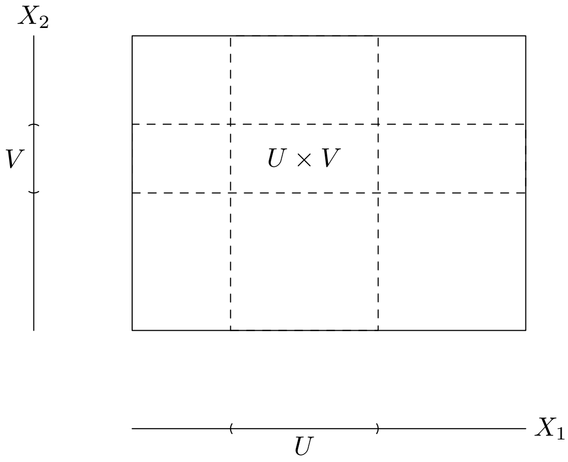


Figure: Bázovú množinu v súčinovej topológie dostaneme ako $U \times V$

Príklady súčinov

- Súčin dvoch diskrétnych priestorov je diskrétny.
- Súčin dvoch indiskrétnych priestorov je indiskrétny.
- Súčin dvoch metrizovateľných priestorov je metrizovateľný.

$$d(x, y) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$$

Projekcie sú spojité a otvorené

Tvrdenie

Nech $X_1 \times X_2$ je topologický súčin priestorov X_1 a X_2 a $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ sú zodpovedajú projekcie. Zobrazenia p_1 a p_2 sú spojité a otvorené.

Projekcia nemusí byť uzavretá

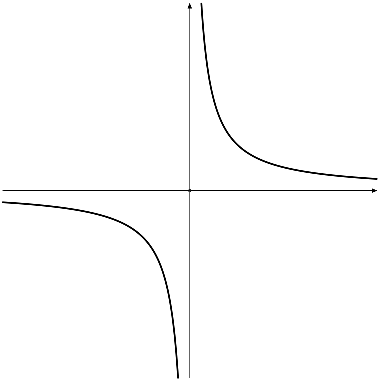


Figure: Projekcia nemusí byť uzavreté zobrazenie

Spojitosť na súčine

Tvrdenie

Nech Y, X_1, X_2 sú topologické priestory. Zobrazenie $f\colon Y \to X_1 \times X_2$ je spojité práve vtedy, keď $p_1 \circ f$ aj $p_2 \circ f$ sú spojité.

- $f_1\colon X \to Y_1$, $f_2\colon X \to Y_2$ spojité $\Rightarrow \langle f_1, f_2\rangle$ spojité
- $f_1\colon X_1 \to Y_1$, $f_2\colon X_2 \to Y_2$ spojité $\Rightarrow f_1 \times f_2$ spojité

Tórus

Príklad

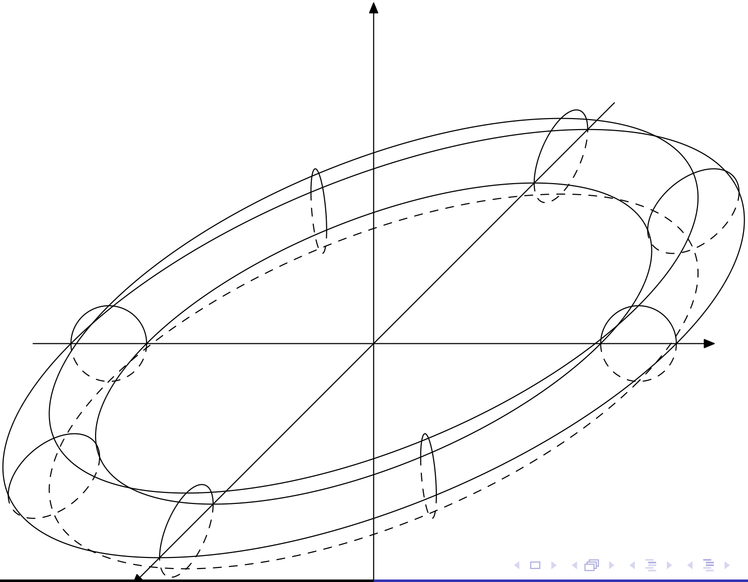
$$T = S \times S,$$

kde S označuje kružnicu.
Faktorové zobrazenie $q\colon I \to S$, $q(t) = e^{i2\pi t}$ nám dáva

$$q \times q\colon I \times I \to S \times S.$$

$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exp(i2\pi x) = \exp(i2\pi x')$ a $\exp(i2\pi y) = \exp(i2\pi y')$.)

Tórus



Definícia súčinu

Definícia

Nech pre každé $i \in I$ máme topologický priestor $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Potom

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}[U]; i \in I, U \in \mathcal{T}_i\}$$

určuje subbázu topológie na množine $X = \prod_{i \in I} X_i$. Označme túto topológiu $\mathcal{T}$.
Priestor $(X, \mathcal{T})$ budeme nazývať *topologický súčin* priestorov $(X_i, \mathcal{T}_i)$ a označovať ho budeme $\prod_{i \in I} X_i$.
V prípade, že $X_i = X$ pre všetky $i \in I$, budeme hovoriť o *mocnine* priestoru X a používať označenie X^I.

Definícia súčinu

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}[U]; i \in I, U \in \mathcal{T}_i\}$$

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in F} p_i^{-1}[U_i]; U_i \in \mathcal{T}_i, F \text{ je konečná podmnožina množiny } I\}$$

$$= \{\bigcap_{i_1}^{i_k} p_{i_1}^{-1}[U_{i_1}] \cap \dots \cap p_{i_k}^{-1}[U_{i_k}]; i_1, \dots, i_k \in I, U_{i_j} \in \mathcal{T}_{i_j}\}$$

Definícia súčinu

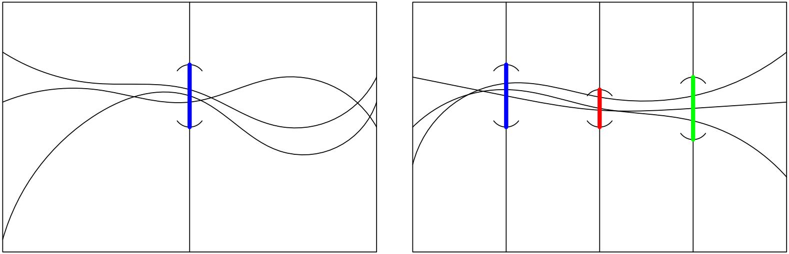


Figure: Obrázok znázorňuje typickú množinu zo subbázy (resp. bázy) spolu s niektorými funkciami patriacimi do tejto množiny

Box topology

Nechceme $\bigcap_{i\in I} p_i^{-1}[U_i] = \prod_{i\in I} U_i$.

- súčin kompaktných priestorov
- univerzálna vlastnosť, kategoriálna limita
- iniciálna topológia vzhľadom na projekcie
- popis spojitosti
- konvergencia = bodová konvergencia

Spojitosť

Tvrdenie

Nech X_i je topologický priestor pre každé $i \in I$ a $\prod_{i \in I} X_i$ je topologický súčin týchto priestorov. Pre každé $i \in I$ je projekcia $p_i \colon \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ spojité a otvorené zobrazenie.

Spojitosť

Tvrdenie

Nech Y je topologický priestor a X_i je topologický priestor pre každé $i \in I$. Nech $f\colon Y \to \prod_{i \in I} X_i$ je zobrazenie.

Zobrazenie f je spojité práve vtedy, keď zloženie $p_i \circ f$ je spojité pre každé $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i \circ f"'] & \prod X_i \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Spojitosť

Dôsledok

Nech pre každé $i \in I$ je $f_i \colon Y \to X_i$ spojité zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom aj $\langle f_i \rangle \colon Y \to \prod_{i \in I} X_i$ je spojité.

Dôsledok

Nech pre každé $i \in I$ je $f_i \colon X_i \to Y_i$ spojité zobrazenie medzi topologickými priestormi. Potom aj $\prod_{i \in I} f_i \colon \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$ je spojité.

Univerzálna vlastnosť

Tvrdenie

Nech X_i je topologický priestor pre každé $i \in I$, označme $\prod_{i\in I} X_i$ ich topologický súčin a $p_i\colon X \to X_i$ príslušné projekcie. Nech Y je topologický priestor a nech pre každé $i \in I$ je $f_i\colon Y \to X_i$ spojité zobrazenie. Potom existuje práve jedno zobrazenie $\overline{f}\colon Y \to \prod_{i\in I} X_i$ s vlastnosťou, že rovnosť

$$p_i \circ \overline{f} = f_i$$

platí pre všetky $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod X_i \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Uzáver v súčine

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je X_i topologický priestor a $A_i \subseteq X_i$. Potom platí

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}.$$

Dôsledok

Nech pre každé $i \in I$ je C_i uzavretá podmnožina v X_i. Potom aj $\prod\limits_{i\in I} C_i$ je uzavretá v $\prod\limits_{i\in I} X_i$

Spočítateľná báza

- Súčin spočítateľne veľa priestorov so spočítateľnou bázou topológie má spočítateľnú bázu topológie.
- Súčin spočítateľne veľa priestorov, ktoré vyhovujú prvej axióme spočítateľnosti, vyhovuje prvej axióme spočítateľnosti.

Separabilný priestor

Veta

Nech pre každé $i \in I$ *je* X_i *separabilný priestor a* $|I| \leq \mathfrak{c}$*. Potom aj súčin* $\prod_{i\in I} X_i$ *je separabilný priestor.*

Lema

Nech D *je diskrétny priestor kardinality* $\aleph_0$ *a nech* $|I| = \mathfrak{c}$*. Potom mocnina* D^I *je separabilný priestor.*