Iniciálna a finálna topológia

17. októbra 2024

Iniciálna topológia

Definícia

Nech pre každé $i \in I$ máme daný topologický priestor $(X_i, \mathcal{T}_i)$ a zobrazenie $f_i \colon X \to X_i$. Potom *iniciálna topológia* $\mathcal{T}$ (na množine X) *vzhľadom na systém zobrazení* $\{f_i; i \in I\}$ je najhrubšia topológia taká, že všetky zobrazenie $f_i \colon (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ sú spojité.

Iniciálna topológia

Tvrdenie

Nech $\mathcal{T}$ je iniciálna topológia na X vzhľadom na systém zobrazení $\{f_i\colon X \to X_i, i \in I\}$. Systém

$$\mathcal{S} = \{f_i^{-1}[U]; i \in I, U \in \mathcal{T}_i\}$$

je subbáza iniciálnej topológie.
Ak vezmeme nejaké subbázy $\mathcal{S}_i$ topológií $\mathcal{T}_i$, tak

$$\mathcal{S}' = \{f_i^{-1}[U]; i \in I, U \in \mathcal{S}_i\}$$

nám dá subbázu tej istej topológie.

Príklady iniciálnej topológie

- vloženie
- topologický súčin
- podpriestor súčinu
- slabá a slabá*-topológia

Spojitosť

Veta

*Nech X je množina, a nech pre každé $i \in I$ je $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologický priestor. Nech $\mathcal{T}$ je iniciálna topológia vzhľadom na systém zobrazení $\{f_i \colon X \to X_i, i \in I\}$.
Pre ľubovoľný topologický priestor $(Y, \mathcal{T}')$ a zobrazenie $f \colon Y \to X$ platí: Zobrazenie f je spojité práve vtedy, keď zloženie $f_i \circ f \colon Y \to X_i$ je spojité pre každé $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i \circ f"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\
 & X_i
\end{tikzcd}$$

Iniciálna topológia a súčin

Tvrdenie

Majme topologické priestory $(X, \mathcal{T})$ a $(X_i, \mathcal{T}_i)$ pre $i \in I$. Majme systém zobrazení $\{f_i \colon X \to X_i; i \in I\}$.
Iniciálna topológia vzhľadom na systém zobrazení $\{f_i \colon X \to X_i, i \in I\}$ sa zhoduje s iniciálnou topológiou vzhľadom na zobrazenie $\langle f_i \rangle \colon X \to \prod\limits_{i \in I} X_i$ do topologického súčinu priestorov X_i, $i \in I$.

Iniciálna topológia a súčin

Definícia

Majme systém zobrazení $\{f_i\colon X \to X_i; i \in I\}$. Hovoríme, že tento systém *oddeľuje body* ak pre ľubovoľné $x_{1,2} \in X$ také, že $x_1 \neq x_2$ existuje $i \in I$, pre ktoré $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$.

$$(\forall x_1, x_2 \in X)[x_1 \neq x_2 \Rightarrow (\exists i \in I) f_i(x_1) \neq f_i(x_2)]$$

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je $f_i\colon X \to X_i$ zobrazenie. Potom zobrazenie $\langle f_i\rangle\colon X \to \prod\limits_{i\in I} X_i$ je injektívne práve vtedy, keď systém $\{f_i; i \in I\}$ oddeľuje body.

Iniciálna topológia a súčin

Tvrdenie

Nech pre každé $i \in I$ je $f_i\colon X \to X_i$ zobrazenie medzi topologickými priestormi. Zobrazenie $\langle f_i \rangle\colon X \to \prod\limits_{i\in I} X_i$ je vloženie práve vtedy, keď systém $\{f_i; i \in I\}$ oddeľuje body a X má iniciálnu topológiu vzhľadom na tento systém.

Iniciálna topológia a súčin

Definícia

Nech $\{f_i\colon X\to X_i\}$ je systém zobrazení medzi topologickými priestormi. Hovoríme, že tento systém *oddeľuje body a uzavreté množiny*, ak pre ľubovoľné $x\in X$ a uzavretú množinu $C\subseteq X$ z $x\notin C$ vyplýva existencia $i\in I$ takého, že $f_i(x)\notin\overline{f_i[C]}$.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a pre každé $i\in I$ máme spojitú funkciu $f_i\colon X\to X_i$ do topologického priestoru X_i. Systém $\{f_i; i\in I\}$ oddeľuje body a uzavreté množiny práve vtedy, keď

$$\mathcal{B}=\{f_i^{-1}[V]; i\in I, V\in\mathcal{T}_i\}$$

tvorí bázu topologického priestoru $(X,\mathcal{T})$.

Iniciálna topológia a súčin

Dôsledok

Ak X je T_1-priestor a $\{f_i\colon X \to X_i; i \in I\}$ je systém spojitých zobrazení, ktoré oddeľujú body a uzavreté množiny, tak $\langle f_i \rangle\colon X \to \prod_{i \in I} X_i$ je vloženie.

Diagonála v súčine

$$\Delta = \{(x,x); x \in X\}$$

$$d = \langle f_i \rangle = \langle id_X \rangle : X \to X^I$$

$$X \cong \Delta = d[X]$$

Finálna topológia

Definícia

Nech I je množina a pre každé $i \in I$ máme daný topologický priestor $(X_i, \mathcal{T}_i)$ a zobrazenie $f_i \colon X_i \to X$. Potom *finálna topológia* $\mathcal{T}$ (na množine X) *vzhľadom na systém zobrazení* $\{f_i; i \in I\}$ je najjemnejšia topológia taká, že všetky zobrazenie $f_i \colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}_i)$ sú spojité.

Finálna topológia

Tvrdenie

Majme systém zobrazení $\{f_i\colon X_i \to X; i \in I\}$, *kde dvojica* $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *je topologický priestor pre všetky* $i \in I$. *Položme*

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X; (\forall i \in I) f_i^{-1}[U] \in \mathcal{T}_i\}.$$

Potom $\mathcal{T}$ *je topológia na* X. *Je to presne finálna topológia vzhľadom na tento systém zobrazení.*

Príklady finálnej topológie

- faktorový priestor
- topologický súčet

$$X_i \xhookrightarrow{e_i} \coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{q} Y$$

Spojitosť

Veta

Nech pre každé $i \in I$ máme topologický priestor $(X_i, \mathcal{T}_i)$ a zobrazenie $\{f_i \colon X_i \to X; i \in I\}$. Nech X má finálnu topológiu vzhľadom na $\{f_i; i \in I\}$. Zobrazenie $f \colon X \to Y$ je spojité práve vtedy, keď $f \circ f_i$ je spojité pre každé $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f \circ f_i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Finálna topológia

- Finálna topológia vzhľadom na zobrazenia $f_i\colon X_i \to X$ je to isté ako finálna topológia vzhľadom na $[f_i]\colon \coprod X_i \to X$.
- Zobrazenie $[f_i]\colon \coprod X_i \to X$ je surjektívne práve vtedy, keď $\bigcup\limits_{i\in I} f[X_i] = X$.
- Podmienka $\bigcup\limits_{i\in I} f[X_i] = X$ nám tiež popisuje, kedy je $[f_i]$ faktorové zobrazenie.