Konvergencia postupností

22. októbra 2024

Definícia limity

Definícia

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť bodov z X. Potom a je *limita postupnosti* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ práve vtedy, keď pre každé otvorené okolie U bodu a existuje n_0 také, že $x_n \in U$ pre ľubovoľné $n \geq n_0$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists n_0)(n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U) \tag{1}$$

Budeme používať označenie $a \in \lim x_n$ alebo tiež $x_n \to a$.

Definícia limity

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists n_0)(n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U)$$

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists n_0)(\langle n_0, \infty) \subseteq x^{-1}[U]) \tag{2}$$

Jednoznačnosť limity

Tvrdenie

Ak X je hausdorffovský priestor, tak ľubovoľná postupnosť v X má nanajvýš jednu limitu.

Prvá axióma spočítateľnosti

Lema

Nech X je topologický priestor a $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť bodov z $A \subseteq X$. Ak a je limita postupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, tak $a \in \overline{A}$.

$$(\forall n) x_n \in A \wedge x_n \to a \Rightarrow a \in \overline{A}$$

Špeciálne, ak $A = \{x_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ a $x_n \to a$, tak $a \in \overline{A}$.

$$x_n \to a \Rightarrow a \in \overline{\{x_n; n = 0, 1, 2, \dots\}}$$

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a $C \subseteq X$ je uzavretá množina. Ak $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť bodov z C a a je limita tejto postupnosti, tak platí aj $a \in C$.

Prvá axióma spočítateľnosti

Tvrdenie

Nech X je priestor vyhovujúci prvej axióme spočítateľnosti. Nech $a \in X$ a $A \subseteq X$. Potom $a \in \overline{A}$ práve vtedy, keď existuje postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ taká, že $x_n \to a$ a všetky členy tejto postupnosti ležia v A.

Tvrdenie

Nech X je priestor vyhovujúci prvej axióme spočítateľnosti a $C \subseteq X$. Množina C je uzavretá práve vtedy, keď pre každú postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ prvkov z C platí, že ak a je limita tejto postupnosti, tak $a \in C$.

Prvá axióma spočítateľnosti

Definícia

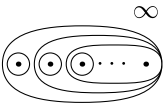
Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $C \subseteq X$. Množina C je *sekvenciálne uzavretá*, ak pre každú konvergentnú postupnosť prvkov z C patrí do C aj jej limita.

$$((\forall n \in N) x_n \in C) \wedge (x_n \to a) \Rightarrow a \in C$$

- uzavretá $\Rightarrow$ sekvenciálne uzavretá
- Prvá axióma spočítateľnosti: sekvenciálne uzavretá $\Rightarrow$ uzavretá

Priestor $C(\omega)$

- $X = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$
- $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ pre $x \neq \infty$
- $\mathcal{B}_\infty =$ doplnky konečných množín



$C(\omega)$

$$C(\omega) \cong \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Priestor $C(\omega)$

$$\overline{x}(n) = \begin{cases} x_n & \text{ak } n \in \mathbb{N}, \\ a & \text{ak } n = \infty. \end{cases}$$

$$x_n \to a \qquad \Leftrightarrow \overline{x} \text{ je spojité}$$

Priestor $C(\omega)$

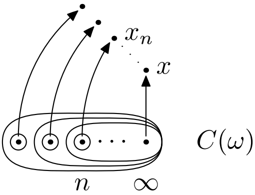


Figure: Súvis priestoru $C(\omega)$ s konvergenciou postupností

Priestor $C(\omega)$

$$n_k \to \infty$$

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\exists k_0 \in \mathbb{N})(k > k_0 \Rightarrow n_k \geq N).$$

Sekvenciálna spojitosť

Definícia

Nech X, Y sú topologické priestory a $f\colon X \to Y$ je zobrazenie. Hovoríme, že zobrazenie f je *sekvenciálne spojité,* ak pre ľubovoľnú postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ v priestore x z $x_n \to a$ vyplýva $f(x_n) \to f(a)$. (T.j. ak postupnosť $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje k a, tak postupnosť $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ konverguje k $f(a)$.)

$$x_n \to a \qquad \Rightarrow \qquad f(x_n) \to f(a)$$

Sekvenciálna spojitosť

Tvrdenie

Nech X, Y sú topologické priestory a $f : X \to Y$ je zobrazenie. Ak f je spojité, tak f je sekvenciálne spojité.

Tvrdenie

Nech X, Y sú topologické priestory a navyše X spĺňa prvú axiómu spočítateľnosti. Ak zobrazenie $f : X \to Y$ je sekvenciálne spojité, tak je aj spojité.

Podpostupnosti, hromadné body

Definícia

Nech $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť bodov topologického priestoru X. Bod $a \in X$ je *hromadný bod* ak pre ľubovoľné okolie U bodu a a pre ľubovoľné $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n \geq n_0$ také, že $x_n \in U$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\langle n_0, \infty) \cap x^{-1}[U] \neq \emptyset) \tag{3}$$

Lema

Nech X je topologický priestor. Ak a je limita postupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, tak a je aj hromadný bod tejto postupnosti.

Priestor $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$

$$\chi_M(x)=\begin{cases}1 & \text{ak } x\in M,\\ 0 & \text{ak } x\notin M.\end{cases}$$

$$\chi_{M_n}\to\chi_M \qquad \Rightarrow \qquad M\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n. \tag{4}$$

Priestor $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$

$$A = \{\chi_F; F \text{ je konečná podmnožina } \mathbb{R}\}$$
$$B = \{\chi_C; C \text{ je spočítateľná}\}$$

- $\chi_{\mathbb{R}} \in \overline{A}$
- Nemám postupnosť konvergujúcu $\chi_{\mathbb{R}}$.
- B nie je uzavretá, ale je sekvenciálne uzavretá.

$$U_F = \{f \in X; (\forall x \in F) f(x) = 1\}$$

Priestor $\omega_1 + 1$

$$\omega_1 \in \overline{\omega_1}$$