Konvergencia sietí

29. októbra 2024

Nahor usmernená množina

Definícia

Nech $\leq$ je relácia na neprázdnej množine D. Množina D sa nazýva *nahor usmernená množina,* ak

(NU1). Pre každé $d \in D$ platí $d \leq d$. (reflexívnosť)

(NU2). Pre ľubovoľné $d_{1,2,3} \in D$ z $d_1 \leq d_2$ a $d_2 \leq d_3$ vyplýva $d_1 \leq d_3$. (tranzitívnosť)

(NU3). Pre ľubovoľné $d_{1,2} \in D$ existuje $d \in D$ tak, že $d_1 \leq d$ a $d_2 \leq d$.

Príklady: lineárne usporiadané množiny, $(\mathcal{B}_x, \supseteq)$

Nahor usmernená množina

Príklady:

- lineárne usporiadané množiny
- ľubovoľný zväz (=č.u.m., kde existuje $\sup\{d_1, d_2\}$, $\inf\{d_1, d_2\}$)
- $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(X), \supseteq)$
- $(\mathcal{B}_x, \supseteq)$

Definícia siete

Definícia

Nech D je nahor usmernená množina a X je topologický priestor. Zobrazenie $d \mapsto x_d$ z D do X budeme nazývať *sieť* a označovať $(x_d)_{d \in D}$.

Limita siete

Definícia

Nech X je topologický priestor a $(x_d)_{d\in D}$ je sieť v X. Hovoríme, že sieť $(x_d)_{d\in D}$ *konverguje* k bodu $a \in X$, alebo tiež že a je *limita siete* $(x_d)_{d\in D}$, ak pre každé otvorené okolie $U \ni a$ existuje $d_0 \in D$ také, že $x_d \in U$ pre každé $d \geq d_0$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists d_0 \in D)(\forall d \in D)(d \geq d_0 \Rightarrow x_d \in U) \tag{1}$$

Označenie: $a \in \lim x_d$, $x_d \to a$

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\exists d_0 \in D)(\langle d_0, \infty) \subseteq x^{-1}[U]) \tag{2}$$

Príklady

- Postupnosti
- Ak M je najväčší prvok $(D, \leq)$, tak $x_d \to x_M$.

$$x_d \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad a \in \overline{\{x_M\}}$$

Stačí subbáza

Tvrdenie

Nech $(x_d)_{d\in D}$ je sieť v topologickom priestor $(X,\mathcal{T})$ a nech $a\in X$. Nech $\mathcal{S}$ je subbáza topológie $\mathcal{T}$. Sieť $(x_d)_{d\in D}$ konverguje k a práve vtedy, keď pre každé $U\in\mathcal{S}$ obsahujúce a existuje $d_0\in D$ také, že $x_d\in U$ pre každé $d\geq d_0$.

$$(\underset{U\ni a}{\forall} U\in\mathcal{S})(\exists d_0\in D)(\underset{d\geq d_0}{\forall} d\in D)x_d\in U$$

Limity sietí popisujú topológiu

Lema

Nech X je topologický priestor a $a \in X$. Predpokladajme, že pre každé $U \in \mathcal{O}_a$ máme nejaký bod $x_U \in U$. Potom sieť $(x_U)_{U \in \mathcal{O}_a}$ na nahor usmernenej množine $(\mathcal{O}_a, \supseteq)$ konverguje k a.
To isté tvrdenie platí ak $\mathcal{O}_a$ nahradíme nejakou bázou okolí $\mathcal{B}_a$ v bode a.

Limity sietí popisujú topológiu

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor, $a \in X$ a $A \subseteq X$. Potom $a \in \overline{A}$ práve vtedy, keď existuje sieť $(x_d)_{d \in D}$ taká, že $x_d \to A$ a pre všetky $d \in D$ platí $x_d \in A$.

$$a \in \overline{A} \Leftrightarrow (\exists (x_d)_{d \in D})[(\forall d) x_d \in A \wedge x_d \to a]$$

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor a $C \subseteq X$. Množina C je uzavretá práve vtedy, keď pre ľubovoľnú konvergentnú sieť pozostávajúcu z bodov patriacich do C aj každá jej limita patrí do C.

Priestor $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$

$$D = \{F \subseteq \mathbb{R}; F \text{ je konečná}\}$$

- Definujeme sieť $(\chi_F)_{F\in D}$.
- $\chi_F \to \chi_{\mathbb{R}}$

Priestor $\langle 0, \omega_1 \rangle$

- $x_\alpha = \alpha$ dáva sieť na nahor usmerennej množine ω_1
- $x_\alpha \to \omega_1$

Jednoznačnosť limity a hausdorffovské priestory

Veta

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Priestor X je hausdorffovský práve vtedy, keď každá sieť v X má nanajvýš jednu limitu.

Priestor $C(D)$ a konvergencia sietí

Definícia

Pre ľubovoľnú nahor usmernenú množinu $(D, \leq)$ definujeme priestor $C(D)$ nasledovne: Množina s ktorou budeme pracovať je $D \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin D$.
Pre $d \in D$ označme

$$\widehat{d} = \{x \in d; x \geq d\} \cup \{\infty\}.$$

Ak položíme

$$\mathcal{B} = \{\{d\}; d \in D\} \cup \{\widehat{d}; d \in D\},$$

tak dostaneme bázu topológie na množine $D \cup \{\infty\}$
Tento topologický priestor priestor označíme $C(D)$.

Priestor $C(D)$ a konvergencia sietí

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $(x_d)_{d\in D}$ je sieť v X. Nech $a \in X$. Potom sieť $(x_d)_{d\in D}$ konverguje k a práve vtedy, keď zobrazenie $\overline{x}\colon C(D) \to X$ definované ako

$$\overline{x}(d) = \begin{cases} x_d & ak\ d \in D, \\ a & ak\ d = \infty \end{cases}$$

je spojité.

Konvergencia sietí a spojitosť

Tvrdenie

Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi X, Y. Zobrazenie f je spojité v bode a práve vtedy, keď pre každú sieť $(x_d)_{d\in D}$ konvergujúcu k bodu a v X aj sieť $(f(x_d))_{d\in D}$ konverguje k $f(a)$ v priestore Y.

$$x_d \to a \qquad \Rightarrow \qquad f(x_d) \to f(a)$$

Dôsledok

Nech X a Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je spojité práve vtedy, keď pre každú sieť $(x_d)_{d\in D}$ v priestore X platí: Ak sieť $(x_d)_{d\in D}$ konverguje k bodu $a \in X$, tak sieť $(f(x_d))_{d\in D}$ konverguje k $f(a)$.

$$x_d \to a \implies f(x_d) \to f(a)$$

Iniciálna topológia

Veta

Nech X je topologický priestor s iniciálnou topológiou vzhľadom na $\{f_i \colon X \to Y_i\}$. Nech $(x_d)_{d\in D}$ je sieť v X a nech $a \in X$.
Sieť $(x_d)_{d\in D}$ konverguje k a (v iniciálnej topológii) práve vtedy, keď pre každé $i \in I$ konverguje sieť $(f_i(x_d))_{d\in D}$ ku $f_i(a)$ (v priestore Y_i).

$$x_d \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall i \in I) f_i(x_d) \to f_i(a) \tag{3}$$

Súčin, podpriestor

Dôsledok

Nech $(x_d)_{d\in D}$ je sieť v topologickom súčine $\prod\limits_{i\in I} X_i$. Táto sieť konverguje k bodu a práve vtedy, keď pre každé $i\in I$ sieť $(p_i(x_d))_{d\in D}$ konverguje k $p_i(a)$ v priestore X_i.

$$x_d \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall i\in I) p_i(x_d) \to p_i(a) \tag{4}$$

súčinová topológia = topológia bodovej konvergencie

Dôsledok

Nech X je topologický priestor a S je jeho podpriestor. Nech $(x_d)_{d\in D}$ je sieť v S a $a\in S$. Táto sieť konverguje k a v podpriestore S práve vtedy, keď konverguje k a v priestore X.

Riemannov a Darbouxov integrál

$$S(f, D) = \sum_{k=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$U(f, d) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{t \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(t)(x_i - x_{i-1})$$

$$L(f, d) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{t \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(t)(x_i - x_{i-1})$$

Riemannov a Darbouxov integrál

$$S(f,D)=\sum_{k=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

- Delenia môžem usporiadať a dostanem tak nahor usmernenú množinu.
- Potom $D\mapsto S(f,D)$ je sieť, limita tejto siete je presne Riemannov integrál.
- Podobne viem dostať horný a dolný integrál ako limity sietí.

Nespočítateľné sumy

Definícia

Nech pre každé $i \in I$ je x_i reálne číslo. Označme

$$D = \{F \subseteq I; F \text{ je konečná}\}$$

a pre každé $F \in D$ položme $S_F = \sum\limits_{i \in F} x_i$.

Potom súčet

$$S = \sum_{i \in I} x_i.$$

definujeme ako limitu siete $(S_F)_{F \in D}$ na nahor usmernenej množine $(D, \subseteq)$.

Nespočítateľné sumy

- Podarilo sa nám takto povedať zmysluplnú definíciu súčtu cez ľubovoľnú indexovú množinu.
- Ak $x_i \geq 0$ pre všetky $i \in I$, tak ekvivalentnú definíciu by sme dostali ako $S = \sup\limits_{F \in D} S_F$.
- Ak $I = \mathbb{N}$ tak S je súčtom v zmysle tejto definície práve vtedy, keď pre každé preusporiadanie $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dostaneme ten istý radu $S = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_{\sigma(i)}$
- Ak existuje (konečný) súčet $\sum\limits_{i \in I} x_i$, tak potom množina $\{i \in I; x_i \neq 0\}$ je spočítateľná. (T.j. nenulové prvky sa môžu vyskytnúť len pre spočítateľne veľa indexov.)

Definícia podsiete

Definícia

Nech $x = (x_d)_{d\in D}$ je sieť v topologickom priestore X. Sieť $(y_e)_{e\in E}$ na nahor usmernenej množine E sa nazýva *podsieť* siete x, ak existuje zobrazenie $h\colon E \to D$ také, že

$$y_e = x_{h(e)}$$

a navyše zobrazenie h spĺňa podmienku

$$(\forall d \in D)(\exists e_0 \in E)(\forall e \in E)(e \geq e_0 \Rightarrow h(e) \geq d). \qquad (5)$$

- Iné označenie: $(x_{d_e})_{e\in E}$, kde $h(e) = d_e$.
- (5) hovorí, že $h(e) \to \infty$ v $C(D)$.
- Podsieť postupnosti nemusí byť postupnosť

Podsiete

Tvrdenie

Ak sieť $(x_d)_{d\in D}$ konverguje k a, tak aj každá jej podsieť $(x_{d_e})_{e\in E}$ konverguje k a.

Hromadné body

Definícia

Nech $(x_d)_{d\in D}$ je sieť v topologickom priestore X. Bod $a \in X$ je *hromadný bod* siete $(x_d)_{d\in D}$ ak pre každé okolie U body x a pre každé $d_0 \in D$ existuje $d \geq d_0$ také, že $x_d \in U$.

$$(\forall U \in \mathcal{O}_a)(\forall d_0 \in D)(\langle d_0, \infty) \cap x^{-1}[U] \neq \emptyset) \qquad (6)$$

Tvrdenie

Nech $(x_d)_{d\in D}$ sieť v topologickom priestore X a $a \in X$. Bod a je hromadný bod siete $(x_d)_{d\in D}$ práve vtedy, keď existuje podsieť tejto siete, ktorá konverguje k a.

Hromadné body

Tvrdenie

Nech $(x_d)_{d\in D}$ sieť v topologickom priestore X a $a\in X$. Bod a je hromadný bod siete $(x_d)_{d\in D}$ práve vtedy, keď pre každé $d\in D$ platí

$$a\in\overline{\{x_e; e\in D, e\geq d\}}.$$

Dôsledok

Množina hromadných bodov siete $(x_d)_{d\in D}$ je uzavretá množina v X.

Kofinálna podsieť

Definícia

Nech $(x_d)_{d\in D}$ je sieť na nahor usmernenej množine D. Nech $E \subseteq D$ je podmnožina taká, že pre každé $d_0 \in D$ existuje $e \in E$ s vlastnosťou $e \geq d_0$;

$$(\forall d \in D)(\exists e \in E)(e \geq d_0). \tag{7}$$

dostaneme tak sieť $x|_E$ na nahor usmernenej množine E. (T.j. sieť $(x_e)_{e\in E}$.)
Takúto sieť nazývame *kofinálna podsieť* siete $(x_d)_{d\in D}$.

Viaceré tvrdenia platné pre iste už neplatia, ak sa obmedzíme na kofinálne podsiete.