Filtre a $\mathcal{F}$-limity

29. októbra 2024

Filtre

Definícia

Systém $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nazveme *filter na množine X*, ak platí

(F0). $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$

(F1). Ak $A, B \in \mathcal{F}$, tak aj $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(F2). Ak $A \in \mathcal{F}$ a $A \subseteq B \subseteq X$, tak aj $B \in \mathcal{F}$.

Povedali sme tým, ktoré množiny sú „veľké“.

Príklady filtrov

- *kofinitný filter* alebo *Fréchetov filter*

$$\mathrm{Cof}(X) = \{X \setminus A; A \subseteq X, A \text{ je konečná množina}\}.$$

- Množina $\mathcal{N}_x$ všetkých okolí bodu x.

Báza filtra

Definícia

Systém $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sa nazýva *báza filtra* na množine X, ak

(BF0). $\emptyset \notin \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(BF1). Ak $B_{1,2} \in \mathcal{B}$, tak existuje $B \in \mathcal{B}$ také, že $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Tvrdenie

Ak $\mathcal{B}$ je báza filtra na množina X, tak

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X; (\exists B \in \mathcal{B}) B \subseteq A\}$$

je filter na množine X.
Tento filter budeme nazývať filter určený bázou $\mathcal{B}$, niekedy budeme používať aj označenie $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.

Báza filtra

(BF0). $\emptyset \notin \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$

(BF1). Ak $B_{1,2} \in \mathcal{B}$, tak existuje $B \in \mathcal{B}$ také, že $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Príklad

- $\mathcal{B}_x$ je báza filtra na množine X.
- Nech $(D, \leq)$ je nahor usmernená množina a

$$\mathcal{B} = \{\langle d, \infty); d \in D\}.$$

Potom $\mathcal{B}$ je báza filtra na množine D.

Ultrafiltre

Definícia

Filter $\mathcal{U}$ na množine X sa nazýva *ultrafilter*, ak pre ľubovoľné $A \subseteq X$ platí

$$(A \in \mathcal{U}) \vee (X \setminus A \in \mathcal{U}), \tag{1}$$

t.j. buď množina A alebo jej doplnok patrí do $\mathcal{U}$.

$$(A \cup B \in \mathcal{U}) \Rightarrow (A \in \mathcal{U}) \vee (B \in \mathcal{U})$$

Tvrdenie

Nech $\mathcal{F}$ je filter na množine X. Filter $\mathcal{F}$ je ultrafilter práve vtedy, keď $\mathcal{F}$ je maximálny filter vzhľadom na inklúziu

Ultrafiltre

$$(A \in \mathcal{U}) \vee (X \setminus A\mathcal{U}),$$

- *hlavný ultrafilter* $\mathcal{F}_a = \{A \subseteq X; a \in A\}$
- Existujú aj ultrafiltre, ktoré nie sú hlavné?

Ultrafiltre

Definícia

Nech X je množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Hovoríme, že $\mathcal{S}$ je *centrovaný systém* ak každý konečný konečný podsystém má neprázdny prienik. T.j. ak $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ je konečná množina, tak $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.
Inak: Ak $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$, tak

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset.$$

Veta

Pre každý centrovaný systém $\mathcal{S}$ na množine X existuje ultrafilter $\mathcal{U}$ na X taký, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$.

Ultrafiltre

Definícia

Filter $\mathcal{F}$ na množine X sa naýzva *voľný filter*, ak $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Tvrdenie

Ultrafilter $\mathcal{U}$ na množine X je voľný práve vtedy, keď $\mathrm{Cof}(X) \subseteq \mathcal{U}$.

Dôsledok

Ak $X \neq \emptyset$, tak existuje voľný ultrafilter na množine X.

Obraz filtra

Tvrdenie

Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $\mathcal{F}$ je filter na množine X. Potom

$$f_*[\mathcal{F}] = \{F \subseteq Y; f^{-1}[F] \in \mathcal{F}\}$$

je filter na množine Y.
Ak navyše platí, že $\mathcal{F}$ je ultrafilter na X, tak filter $f_*[\mathcal{F}]$ je ultrafilter na Y.

$\mathcal{F}$-limita

Definícia

Nech X je topologický priestor, a je bod z X, $\mathcal{F}$ je filter na množine M. Nech $f\colon M \to X$ je ľubovoľné zobrazenie. Hovoríme, že a je *limita funkcie f vzhľadom na filter $\mathcal{F}$* alebo tiež *$\mathcal{F}$-limita funkcie f* ak pre každé otvorené okolie bodu a platí

$$f^{-1}[U] = \{x \in M; f(x) \in U\} \in \mathcal{F}.$$

Budeme používať označenie $a \in \mathcal{F}\text{-}\lim f$ alebo tiež $\mathcal{F}\text{-}\lim f = a$.

- $\mathcal{F}$-limita vo všeobecnosti nemusí byť určená jednoznačne.
- Pre $X = \mathbb{N}$ máme $\mathcal{F}$-limitu postupnosti; označenie $a \in \mathcal{F}\text{-}\lim x_n$ alebo $\mathcal{F}\text{-}\lim x_n = a$.
- Pre kofinitný filter na $\mathbb{N}$ máme obvyklú konvergenciu postupností.

$\mathcal{F}$-limita

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $\mathcal{S}$ je subbáza topológie priestoru X. Nech $f\colon M \to X$ je zobrazenie a $\mathcal{F}$ je filter na M. Potom bod a je $\mathcal{F}$-limita funkcie f práve vtedy, keď pre každé okolie U bodu a patriace do $\mathcal{S}$ platí $f^{-1}[U] \in \mathcal{F}$.

$$(\underset{U \ni a}{\forall} U \in \mathcal{S})(f^{-1}[U] \in \mathcal{F})$$

Tvrdenie

Nech $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sú filtre na M také, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $f\colon M \to X$. Ak a je $\mathcal{F}$-limita funkcie f, tak a je aj $\mathcal{G}$-limita funkcie f.

$$a \in \mathcal{F}\text{-}\lim f \qquad \Rightarrow \qquad a \in \mathcal{G}\text{-}\lim f$$

Priestor $C(\mathcal{F})$

Definícia

Ak $\mathcal{F}$ je filter na množine X, tak pomocou neho môžeme definovať priestor $C(\mathcal{F})$ na množine $X \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin X$ tak, že vezmeme

$$\mathcal{B} = \{\{x\}; x \in X\} \cup \{F \cup \{\infty\}; F \in \mathcal{F}\}$$

ako bázu topológie.

Priestor $C(\mathcal{F})$

$$\mathcal{B} = \{\{x\}; x \in X\} \cup \{F \cup \{\infty\}; F \in \mathcal{F}\}$$

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, $a \in X$. Nech $\mathcal{F}$ je filter na množine M a $f\colon M \to X$ je zobrazenie. Bod a je $\mathcal{F}$-limita zobrazenia f práve vtedy, keď zobrazenie $\overline{f}\colon C(\mathcal{F}) \to X$ definované ako

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ak\ x \in X, \\ a & ak\ x = \infty. \end{cases}$$

je spojité.

Priestor $C(\mathcal{F})$

Máme ďalší príklad priestoru, kde postupnosti nestačia na popísanie topológie.

Príklad

Nech $\mathcal{F}$ je ľubovoľný voľný ultrafilter na množine $\mathbb{N}$. Potom platí:

- Bod ∞ patrí do uzáveru množiny $\mathbb{N}$.
- Z toho tiež vidíme, že ∞ je hromadným bodom postupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ určenej ako $x_n = n$
- Neexistuje postupnosť prvkov z $\mathbb{N}$, ktorá konverguje k ∞.

Na reálnej osi

$\mathcal{B} = \{(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}; \varepsilon > 0\}$	$\mathcal{F}\text{-}\lim f = \lim\limits_{x \to a} f(x)$
$\mathcal{B}_+ = \{(a, a+\varepsilon); \varepsilon > 0\}$	$\mathcal{F}_+\text{-}\lim f = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$
$\mathcal{B}_\infty = \{(n, \infty); n \in \mathbb{N}\}$	$\mathcal{F}_\infty\text{-}\lim f = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Limita v bode

Definícia

Nech X, Y sú topologické priestory, $M \subseteq X$ a $f\colon M \to Y$ je zobrazenie. Nech $a \in \overline{M}$. Hovoríme, že bod $b \in Y$ je *limita funkcie f v bode a*, ak pre ľubovoľné okolie $V \in \mathcal{O}_b$ bodu b existuje okolie $U \in \mathcal{O}_a$ bodu a také, že pre každé $x \in M$ také, že $x \in U$ a $x \neq a$, platí $f(x) \in V$.

$$(\forall V \in \mathcal{O}_b)(\exists U \in \mathcal{O}_a) f[M \cap (U \setminus \{a\})] \subseteq V$$

Používame označenie

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

$$\mathcal{B} = \{(U \setminus \{a\}) \cap M; U \in \mathcal{O}_a\}$$

Siete

Majme sieť $(x_d)_{d\in D}$ na nahor usmernenej množine $(D,\leq)$.

$$\mathcal{B}_D=\{\langle d,\infty);d\in D\}$$
$$\mathcal{F}_D=\{A\subseteq D;(\exists d\in D)\langle d,\infty)\subseteq A\}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{D}}\text{-}\lim x=a \qquad\Leftrightarrow\qquad x_d\to a$$

$\mathcal{F}$-limita v $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\text{-}\lim(f+g) = \mathcal{F}\text{-}\lim f + \mathcal{F}\text{-}\lim g = a + b$$
$$\mathcal{F}\text{-}\lim(f \cdot g) = (\mathcal{F}\text{-}\lim f) \cdot (\mathcal{F}\text{-}\lim g)$$

Limita filtra

Definícia

Nech X je topologický priestor a $\mathcal{F}$ je filter na množine X. Hovoríme, že $\mathcal{F}$ *konverguje* k a, resp. že a je *limita filtra* $\mathcal{F}$, ak $\mathcal{N}_a \subseteq \mathcal{F}$, t.j. $\mathcal{F}$ obsahuje všetky okolia bodu a.
Označenie: $\mathcal{F} \to a$.

$$\mathcal{F} \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad a \in \mathcal{F}\text{-}\lim id_X$$

Limita filtra

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $\mathcal{S}$ je subbáza topológie priestoru X. Nech $\mathcal{F}$ je filter na M. Potom a je $\mathcal{F}$-limita funkcie f práve vtedy, keď pre každé okolie U bodu a patriace do $\mathcal{S}$ platí $U \in \mathcal{F}$.

$$\mathcal{F} \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{N}_a \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$$

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sú filtre množine X. Ak platí $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ a $\mathcal{F} \to a$, tak $\mathcal{G} \to a$.

Obraz filtra

Tvrdenie

Nech $f\colon X \to Y$ je zobrazenie a $\mathcal{F}$ je filter na množine X. Potom

$$f_*[\mathcal{F}] = \{F \subseteq Y; f^{-1}[F] \in \mathcal{F}\}$$

je filter na množine Y.
Ak navyše platí, že $\mathcal{F}$ je ultrafilter na X, tak filter $f_*[\mathcal{F}]$ je ultrafilter na Y.

Súvis s $\mathcal{F}$-limitou

$$f_*[\mathcal{F}] = \{F \subseteq Y; f^{-1}[F] \in \mathcal{F}\}$$

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor a $a \in X$. Nech $\mathcal{F}$ je filter na množine M a $f\colon M \to X$ je zobrazenie. Potom platí: Bod a je $\mathcal{F}$-limita funkcie f práve vtedy, keď a je limita filtra

$$f_*[\mathcal{F}] = \{F \subseteq X; f^{-1}[F] \in \mathcal{F}\}.$$

Vlastnosti konvergencie filtrov

- Limity popisujú uzáver, a teda aj uzavreté množiny a topológiu.
- Jednoznačnosť limity charakterizuje T_2-priestory.
- Pomocou konvergencie môžeme charakterizovať spojitosť.
- Konvergencia v súčine je bodová konvergencia.
- Neskôr pri kompaktnosti budeme mať charakterizáciu pomocou sietí aj pomocou filtrov.

Uzáver

Veta

Nech X je topologický priestor, $A \subseteq X$, $a \in X$. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) $a \in \overline{A}$

(ii) *Existujú zobrazenie $f\colon M \to X$ a filter $\mathcal{F}$ na množine M také, že $f[M] \subseteq A$ a $a \in \mathcal{F}\text{-}\lim f$.*

(iii) *Existuje filter $\mathcal{F}$ na množine X taký, že $A \in \mathcal{F}$ a $\mathcal{F} \to a$.*

Spojitosť

Tvrdenie

Nech $g\colon X \to Y$ je zobrazenie medzi topologickými priestormi X, Y. Nech $a \in X$.

(i) *Zobrazenie $g\colon X \to Y$ je spojité v bode a.*

(ii) *Pre ľubovoľné zobrazenie $f\colon M \to X$ a filter $\mathcal{F}$ na množine X platí: Ak $a \in \mathcal{F}\text{-}\lim f$, tak $g(a) \in \mathcal{F}\text{-}\lim(g \circ f)$.*

(iii) *Pre ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ na množine X platí: Ak $\mathcal{F} \to a$, tak $g_*[\mathcal{F}] \to g(a)$.*

Spojitosť

Dôsledok

Nech X a Y sú topologické priestory a $g\colon X \to Y$ je zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *Zobrazenie $g\colon X \to Y$ je spojité.*

(ii) *Pre ľubovoľný bod $a \in X$, ľubovoľné zobrazenie $f\colon M \to X$ a filter $\mathcal{F}$ na množine X platí: Ak $a \in \mathcal{F}\text{-}\lim f$, tak $g(a) \in \mathcal{F}\text{-}\lim(g \circ f)$.*

(iii) *Pre ľubovoľný bod $a \in X$ a ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ na množine X platí: Ak $\mathcal{F} \to a$, tak $g_*[\mathcal{F}] \to g(a)$.*

Jednoznačnosť a T_2

Veta

Nech X je topologický priestor. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X je Hausdorffovský.*

(ii) *Pre ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ na X existuje nanajvýš jedna limita.*

(iii) *Pre ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ na množine M a ľubovoľné zobrazenie $f\colon M \to X$ existuje nanajvýš jedna $\mathcal{F}$-limita.*

Iniciálna topológia

Veta

Nech topologický priestor X má iniciálnu topológiu vzhľadom na systém zobrazení $\{f_i \colon X \to Y_i; i \in I\}$. Potom:
a) Pre ľubovoľné $f \colon M \to X$ a ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ na množine M platí $a \in \mathcal{F}\text{-}\lim f$ práve vtedy, keď $f_i(a) \in \mathcal{F}\text{-}\lim(f_i \circ f)$ pre všetky $i \in I$.

$$a \in \mathcal{F}\text{-}\lim f \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall i \in I) f_i(a) \in \mathcal{F}\text{-}\lim(f_i \circ f)$$

b) Pre ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ na množine X platí

$$\mathcal{F} \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall i \in I)(f_i)_*[\mathcal{F}] \to f_i(a)$$

Konvergencia v súčine

Dôsledok

Nech $X = \prod_{i \in I} X_i$ *je topologický súčin priestorov* X_i, $i \in I$. *Označme projekcie ako* $p_i \colon X \to X_i$. *Nech* $a \in X$.

a) Pre ľubovoľné $f \colon M \to X$ *a filter* $\mathcal{F}$ *na* M *platí*

$$a \in \mathcal{F}\text{-}\lim f \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall i \in I) p_i(a) \in \mathcal{F}\text{-}\lim(p_i \circ f).$$

b) Pre ľubovoľný filter $\mathcal{F}$ *na množine* X *platí*

$$\mathcal{F} \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad (\forall i \in I)(p_i)_*[\mathcal{F}] \to p_i(a)$$

Hromadné body

Definícia

Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $\mathcal{F}$ je filter na X. Hovoríme, že a je *hromadný bod* filtra $\mathcal{F}$, ak

$$a \in \overline{F}$$

pre všetky $F \in \mathcal{F}$.

Hromadné body

Lema

Nech X je topologický priestor a $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sú filtre na X. Ak $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ a bod a je hromadný bod filtra $\mathcal{G}$, tak a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$.

Lema

Nech X je topologický priestor a $\mathcal{F}$ je filter na X. Ak $\mathcal{F} \to a$, tak a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$.

Tvrdenie

Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $\mathcal{F}$ je filter na množine X. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

(i) *a je hromadný bod filtra $\mathcal{F}$.*

(ii) *Existuje filter $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ taký, že $\mathcal{G} \to a$.*

(iii) *Existuje ultrafilter $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ taký, že $\mathcal{U} \to a$.*